Systèmes formels

1. Définition d'un SF
    - Morphologie
    - Théorie propre
    - Classes d'un SF
    - Classes données
    - Classes construites
2. Décidabilité des SF
3. Restrictions
4. Un exemple de SF
5. Quelques SF
    - Système relationnel
    - Système logique
    - Système applicatif

Systèmes formels

Définition

- Un système formel est défini par un ensemble règles primitives que l'on peut diviser en 3 parties qui spécifient respectivement :

  1. Un ensemble d'objets : Obs
  2. Un ensemble d'énoncés appelés énoncés élémentaires
  3. L'ensemble des énoncés élémentaires vrais constituent l'ensemble des théorèmes élémentaires.

- Les deux premières parties constituent la morphologie du système.
- La troisième partie énonce les axiomes et les règles déductives. Elle constitue la théorie propre du système.

Systèmes formels

Définition

- **Les axiomes sont des règles élémentaires qui sont vrais sans démonstration.**
- **Les règles déductives montrent comment les théorèmes dérivent à partir des axiomes par application des règles.**
- **Dans un système formel on définit la notion de classe. Intuitivement, on peut parler de la classe des atomes , classe des objets.**
- **De façon similaire, les énoncés élémentaires, les axiomes, les différents règles et les théorèmes forment des classes.**

Systèmes formels

Définition

- **On distingue :**

— **Les classes données : C(atomes), C(opérations), C(prédicats), C(axiomes), C(règles)**

— **Les classes construites : C(énoncés élémentaires), C(théorèmes élémentaires)**

- **On s'intéresse plus particulièrement aux classes construites.**

Systèmes formels

Définition

- **Nous pouvons observer que les classes construites sont spécifiées par une définition comportant 3 parties :**
  - **1- Certains éléments initiaux sont spécifiés(Spécifications initiales)**
  - **2- Certaines procédures de construction de nouveaux éléments à partir d'éléments initiaux sont décrites(Principes de génération)**
  - **3- il est donc clair, que les éléments de la classe sont obtenu à partir des éléments initiaux par itération de ces procédures.(Spécifications finales)**
- **Une telle définition est dite inductive.**

Systèmes formels

Définition

- **On peut aussi définir la théorie propre du système(troisième partie) comme un triplet S = (A, R, W) avec**

  A : ensemble des axiomes

  R : ensemble des règles.

  W : ensemble des formules bien formées.

  A est inclue dans W.

  Une règle est une application de W^n dans W, ou n est l'arité de la règle.

- **On appelle théorème de S, tout axiome de S ou tout élément de W pouvant être déduit à partir des axiomes de S par application des différents éléments de R.**

Systèmes formels

Définition

- **Les théorèmes d'un système formel (A, R, W) forment un ensemble, noté A^+,**

  $A^+ = U\ A_i$, i >=O.

  tel que A_i, i dans N, est la suite de sous ensembles de W définie par:

  $A_0 = A$,

  $A_i = A_{i-1}$ U { les images des éléments de A_{i-1} générés par les règles}, pour i >=1.

Systèmes formels

Décidabilité

- étant donnée une définition inductive d'une classe C. Si une construction d'une entité A à partir d'éléments initiaux au moyen des principes de générations est connue alors l'entité A appartient à la classe C
- Il se peut aussi qu'on ne peut pas décider si une entité A appartient ou pas à la classe.
- quand il existe un traitement prescrit qui, pour toute entité A donnée, déterminera effectivement si A appartient ou non à la classe C, alors C est appelée une classe définie.
- Si la classe des théorèmes est définie, on dit que le système formel est décidable.

Systèmes formels

Restrictions à imposer à un système formel

- **Dans sa partie morphologique, on exige qu'il soit complètement définie. La formulation doit être telle que les notions d'atomes, d'opérations de degré n, d'objets, prédicats et énoncés élémentaires soient tous définies.**

- **Dans sa théorie propre, on n'exige pas que la classe des théorèmes élémentaires soit définie.**

Systèmes formels

Exemple de système formel

- Considérons un exemple très simple de la théorie : la théorie élémentaire des numéraux notée N.

— Les objets élémentaires sont O, O', O'', ... c'est à dire zéro, le successeur de zéro, le successeur du successeur de zéro, ...

— Les énoncés élémentaires sont les équations entre les objets, par exemple O = O, O' = O''

— On prendra comme axiome O = O et comme règle de dérivation : " Si deux objets sont égaux, leurs successeurs sont égaux".

— Nous pouvons donc déduire comme théorème élémentaires O' = O', O'' = O''.

Systèmes formels

Exemple de système formel

- Théorie de façon plus formelle :
- a) Objets

  - un objet primitif : O

  - une opération unaire : '

  - une règle de formation d'objets : si x est un objet, alors x' est un objet.
- b) Énoncés élémentaires

  - un prédicat binaire : =

  - une règle de formation d'énoncés élémentaires : si x et y sont des objets, alors x = y est un énoncé élémentaire.
- c) Théorèmes élémentaires

  - un axiome : O = O

  - une règle de déduction : si x=y alors x'=y'

Systèmes formels

Exemple de système formel

- **N est donc défini comme un système formel. Les théorèmes élémentaires de ce système sont O = O; O' = O'; O'' = O''; ...**

Systèmes formels

Quelques systèmes formels

- **Systèmes relationnels :**

Les énonces élémentaires sont formés uniquement avec des prédicats binaires (relation entre deux objets)

Si le prédicat a la propriété de réflexivité, symétrie et transitivité, le système est dit équationnel.

- **Systèmes logiques**

Les énonces élémentaires sont formés uniquement avec des prédicats unaires.

Systèmes formels

Quelques systèmes formels

- **<u>Systèmes applicatif</u>**

Les énonces élémentaires sont formés uniquement avec l'opération d'application(juxtaposition).

S'il possède en plus d'autres opérations, il est dit <u>quasi-applicatif</u>.

Systèmes formels

Quelques systèmes formels

- **<u>Systèmes applicatif</u>**

On peut accomplir une réduction à un système formel avec une seule opération binaire : l'application. On introduit dans le système de nouveaux objets correspondant aux opérations originales.

Ainsi abcd sera interprété comme (((ab)c)d)

A l'opération f(a1, a2, ...,an) on associe l'atome F. on aura donc Fa1a2....an et ainsi on élimine f.

a+b sera représenté par Aab

Le système N des numéraux devient applicatif en remplaçant ' par S et = par Q.

x' sera noté Sx et x=y sera noté Qxy.