Chapitre : **Suites et séries de fonctions.**

I. SUITES DE FONCTIONS.

Définition: *Soit E un ensemble non vide de $\mathbb{R}$* et $\mathcal{F}(E,\mathbb{R}) = \{f \text{ fonction } / f : E \to \mathbb{R}\}$.

On appelle suite de fonctions, une fonction f : $\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathcal{F}(E,\mathbb{R}) \\ n \to f_n \end{array}$ *telle que*

$$f_n \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \to f_n(x) \end{array}.$$

Plus pratiquement on notera la suite de fonctions par $\{f_n\}_n$ ou même $(f_n)_n$.

I.1. Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions.

I.1.1 Définitions.

Définition1: *Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble E. On dira que $\{f_n\}_n$ est convergente simplement vers une fonction f sur $A \subseteq E$ si*

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

On notera dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x),\ \forall x \in A$ ou bien $f_n \overset{\text{simple}}{\to} f$ sur A.

Remarque1: N peut dépendre de ε et de x.

Exemple: Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ où

$$f_n(x) = \frac{2nx}{3+nx},\ E = [0,+\infty[.$$

<u>Réponse:</u> Il s'agit de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x),\ \forall x \in E$.

1er cas: $x \neq 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2nx}{3+nx} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2nx}{nx} = 2.$

2ème cas: $x = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0.$

Donc $\{f_n\}_n$ est convergente simplement sur E, ie $f_n \overset{\text{simple}}{\to} f \,/\, f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x > 0. \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$.

Définition2: *Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble E. On dira que $\{f_n\}_n$ est convergente uniformément sur $A \subseteq E$ vers une fonction f si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in A \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

On notera dans ce cas $f_n \overset{\text{uniforme}}{\to} f$ sur A.

Remarque2: N peut dépendre de ε seulement!

Proposition1: Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble E. $\{f_n\}_n$ est convergente uniformément sur $A \subseteq E$ vers une fonction f ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$, où $\|f_n - f\| = \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$.

Preuve: On a que $\forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$.

1) supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0 \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \Rightarrow\ \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right].$$

Comme $\forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ on aura

$$\left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in A\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right]$$

2) supposons que $f_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} f$ *sur*
$A \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in A\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right]$
Comme $\forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, il suffit d'appliquer le $\sup$ à l'inégalité et on obtient:

$$\left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \Rightarrow\ \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right] \text{ ie } \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$$

Exemple: Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ où

$$f_n(x) = xe^{-nx},\ x \geq 0.$$

Réponse:

a) Convergence simple: Il s'agit de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x),\ \forall x \in E = [0,+\infty[$.

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} xe^{-nx} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} xe^{-nx} & \text{si } x > 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} = 0. \text{ Donc } f_n \overset{\text{simple}}{\longrightarrow} f \text{ sur } E \,/\, f(x) = 0.$$

b) Convergence uniforme: A t'on $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$?

Calculons $\|f_n - f\| = \sup\limits_{x\in E} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in E} (xe^{-nx})$, il suffit d'étudier les variations de f_n :

$f_n'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = e^{-nx}(1 - nx)$. On a le TV suivant:

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$		$-$	
f_n		$\nearrow$		$\searrow$	

ie $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{ne} = 0$.

Conclusion: $f_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} f$ sur $[0,+\infty[$.

Proposition2: La convergence uniforme $\Rightarrow$ La convergence simple.

Théorème: Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble E. On dira que $\{f_n\}_n$ est convergente uniformément sur $A \subseteq E$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall m \geq N,\ \forall x \in A\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall m \geq N,\ \Rightarrow\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

Remarque: ce théorème permet de montrer la convergence uniforme sans connaitre la fonction limite f.

I.1.2 Méthodes pratiques pour l'étude de la convergence uniforme.

Proposition1: Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble E.
Supposons que $\{f_n\}_n$ est convergente sur $A \subseteq E$ vers une fonction f.
S'il existe une suite réelle $(M_n)_n$ telle que : $|f_n(x) - f(x)| \leq M_n \ \forall x \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$.

Alors $f_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} f$ sur A. (la suite $(M_n)_n$ est indépendante de $x \in A$).

<ins>**Preuve:**</ins> On a : $|f_n(x) - f(x)| \leq M_n$, appliquons le $\sup$ à l'inégalité, on obtient:
$\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq M_n$, puis passons à la limite, on aura :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$ ie $f_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} f$ sur A.

Exemple: Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ où

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n},\ x \in \mathbb{R}.$$

<ins>Réponse:</ins>
a) Convergence simple: Il s'agit de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x),\ \forall x \in E = \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n} = 0$, ie $f_n \overset{\text{simple}}{\longrightarrow} f$ sur $E / f(x) = 0$.
b) Convergence uniforme: A t'on $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$?
Il suffit de remarquer que $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n}\ \forall x \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\| = 0$

Conclusion: $f_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} \mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition2: Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble E.
Supposons que $\{f_n\}_n$ est convergente sur $A \subseteq E$ vers une fonction f.
S'il existe une suite réelle positive $(m_n)_n$ telle que : $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \geq m_n$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n \neq 0$.

Alors $f_n \overset{\text{uniforme}}{\nrightarrow} f$ sur A. (la suite $(m_n)_n$ est indépendante de $x \in A$).

<ins>**Preuve:**</ins> évidente.

Remarque: En pratique, on choisira $m_n = |f_n(x_n) - f(x_n)|$ avec $(x_n)_n \subset A$.

Exemple: Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ où

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

<ins>Réponse:</ins>
a) Convergence simple: Il s'agit de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x),\ \forall x \in E = \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, ie $f_n \overset{\text{simple}}{\longrightarrow} \mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$.
b) Convergence uniforme: A t'on $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$?
Il suffit de remarquer que pour $x_n = \dfrac{1}{n}$, on pose $m_n = |f_n(x_n)| = \dfrac{\sin 1}{2}$ et
$\lim\limits_{n\to+\infty} m_n \neq 0$.

On en conclut $f_n \overset{\text{uniforme}}{\nrightarrow} \mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice: Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ où

$$f_n(x) = \frac{\log(1+nx)}{1+nx},\ x \in \mathbb{R}.$$

Donner les domaines où il y a convergence uniforme.

Réponse:

Tout d'abord cherchons $E = \bigcap_{n\geq 0} D_{f_n} \,/\, D_{f_n} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1+nx > 0\right\} = \bigcap_{n\geq 0} \left]-\frac{1}{n}, +\infty\right[$

Or $\left(-\frac{1}{n}\right)_n \nearrow$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ mais $f_n(0)$ est bien définie. Donc $E = [0,+\infty[$.

1) Convergence simple: Il s'agit de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x),\ \forall x \in [0,+\infty[$.

1er cas: $x \neq 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log(1+nx)}{1+nx} = 0$ (on rapelle: $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\log u}{u} = 0$).

2ème cas: $x = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

Donc $f_n \overset{\text{simple}}{\longrightarrow} \mathbf{0}$ sur $[0,+\infty[$.

2) Convergence uniforme: A t'on $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0 \,/\, \|f_n - f\| = \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$?

Calculons $\|f_n - f\| = \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} \left(\dfrac{\log(1+nx)}{1+nx}\right)$, il suffit d'étudier les variations de f_n :

$$f_n'(x) = \frac{\left(\frac{n}{1+nx}\right).(1+nx) - n\log(1+nx)}{(1+nx)^2} = \frac{n}{(1+nx)^2}(1-\log(1+nx)).$$

On a le TV suivant:

x	0	$\frac{e-1}{n}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$		$-$
f_n	$\nearrow$		$\searrow$

ie $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} f_n(x) = f_n\left(\frac{e-1}{n}\right) = \frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \neq 0$.

Conclusion: $f_n \overset{\text{uniforme}}{\nrightarrow} \mathbf{0}$ sur $[0,+\infty[$.

3) Cherchons les domaines où la convergence est uniforme.

Remarque: Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| \neq 0$, le $\sup$ est atteint en $x_n = \frac{e-1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, ceci implique que tout voisinage contenant 0 de la forme $[0,a]$, $a > 0$ contient $(x_n)_n$ pour n assez grand, ie $\frac{e-1}{n} \leq a$ pour $n >>$.

1er cas: Sur $[0,a]$. On a le TV suivant pour $n >>$:

x	0	$\frac{e-1}{n}$	a
$f_n'(x)$	$+$		$-$
f_n	$\nearrow$		$\searrow$

ie $\sup\limits_{x\in[0,a]} f_n(x) = f_n\left(\frac{e-1}{n}\right) = \frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \neq 0$.

Conclusion1: $f_n \overset{\text{uniforme}}{\nrightarrow} \mathbf{0}$ sur tout $[0,a]$, $a > 0$.

2ème cas: Sur $[a,+\infty[$. $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} f_n(x) = f_n(a) = \dfrac{\log(1+na)}{1+na}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$

Conclusion2: $f_n \overset{\text{uniforme}}{\to} \mathbf{0}$ sur tout $[a,+\infty[,\ a > 0$.

I.2 Propriétés de la limite d'une suite de fonctions.

Théorème1:"Conservation de la continuité"

Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et convergente sur I vers une fonction f, vérifiant les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \text{1) Toutes les } f_n \text{ sont continues en } x_0 \in I. \\ \text{2) } f_n \overset{\text{uniforme}}{\to} f \text{ sur } I. \end{cases}$$

Alors f est continue en x_0.

Remarques:

1) f est continue en x_0 ie

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0).$$

2) C'est la contraposée du théorème qui est la plus utile comme le montre l'exemple.

Exemple: On reprend la suite de fonctions: $\{f_n\}_n$ / $f_n(x) = \dfrac{2nx}{3+nx}$, $E = [0,+\infty[$.

Y a t-il convergence uniforme sur E?

<u>Réponse:</u>

a) Convergence simple: On rapelle que $f_n \overset{\text{simple}}{\to} f$ sur E / $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x > 0. \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$

b) Convergence uniforme: On a que

$$\begin{cases} \text{1) Toutes les } f_n \text{ sont continues en } x_0 = 0 \in [0,+\infty[. \\ \text{2) } f_n \overset{\text{simple}}{\to} f \text{ sur } [0,+\infty[\text{ et } f \text{ discontinue en } x_0 = 0 \in [0,+\infty[. \end{cases}$$

On en conclut que $f_n \overset{\text{uniforme}}{\nrightarrow} f$ sur $[0,+\infty[$ (il n y aura pas de convergence uniforme sur tout intervalle contenant $x_0 = 0$).

Corollaire: Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et convergente sur I vers une fonction f, vérifiant les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \text{1) Toutes les } f_n \text{ sont continues sur } I. \\ \text{2) } f_n \overset{\text{uniforme}}{\to} f \text{ sur } I. \end{cases}$$

Alors f est continue sur I.

Théorème2:"Conservation de l'intégrabilité"

Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions définie et convergente vers une fonction f sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, de plus elle vérifie les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \text{1) Toutes les } f_n \text{ sont intégrables sur } [a,b]. \\ \text{2) } f_n \overset{\text{uniforme}}{\to} f \text{ sur } [a,b]. \end{cases}$$

Alors f est intégrable sur $[a,b]$.

Remarque: f est intégrable sur $[a,b]$ ie
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)dt = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right).$$
Exemple: Soit la suite de fonctions: $\{f_n\}_n$ / $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x,\ E = [0, \frac{\pi}{2}]$.
Y a t-il convergence uniforme sur E?
Réponse:
a) Convergence simple: On a que pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}] : 0 \leq \cos x \leq 1$
1er cas: $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sin x.\, e^{\log n + n\log(\cos x)} = \sin x.\lim_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{\log n}{n} + \overbrace{\log(\cos x)}^{<0}\right)} = 0.$$
2ème cas: $x = 0.\ \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$
3ème cas: $x = \frac{\pi}{2}.\ \lim_{n\to+\infty} f_n(\frac{\pi}{2}) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$
Donc $f_n \overset{\text{simple}}{\longrightarrow} \mathbf{0}$ sur $[0,, \frac{\pi}{2}]$.
b) Convergence uniforme: Appliquons le théorème de conservation de l'intégrabilité (sa contraposée) sur $[0,, \frac{\pi}{2}]$.

⇝ On a d'une part : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dt = 0$

⇝ D'autre part : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \sin t dt = -\frac{n}{n+1}\left[(\cos t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n}{n+1}$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

Donc $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \neq \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)$ et comme toutes les f_n sont intégrables sur $[0,, \frac{\pi}{2}]$ alors $f_n \overset{\text{uniforme}}{\nrightarrow} f$ sur $[0,, \frac{\pi}{2}]$.

Corollaire: Sous les mêmes hypothèses que le théorème2 , en posant $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $F_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} F$ sur $[a,b]$.

Preuve: On a que
$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))dt\right| \leq \int_a^x |(f_n(t) - f(t))|dt \leq \int_a^x \|f_n - f\|dt = \|f_n - f\|(x-a)$$
Et comme $x \in [a,b]$ alors $|F_n(x) - F(x)| \leq \|f_n - f\|(b-a)$, on posera $M_n = \|f_n - f\|(b-a)$ et $\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$, on obtient alors $\lim_{n\to+\infty} \|F_n - F\| = 0$.

Théorème3: "Conservation de la dérivabilité".
Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et convergente sur

I vers une fonction f, vérifiant les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \text{1) Toutes les } f_n \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } I. \\ \text{2) } \exists x_0 \in I \text{ telle que la suite numérique } (f_n(x_0))_n \text{ converge.} \\ \text{3) } (f'_n)_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers une fonction } g. \end{cases}$$

Alors on a les résultats suivants :

$$\begin{cases} \text{a) } (f_n)_n \text{ converge uniformément vers une fonction } f. \\ \text{b) } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et on a } f' = g \text{ ie } \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x). \end{cases}$$

Remarque: Les points 2) et a) du théorème3 peuvent être supprimé selon le besoin.

II. SERIES DE FONCTIONS.

II.1 Définitions et premières propriétés.

Elles sont analogues à celles déja vues au niveau des séries numériques avec toutefois quelques modifications:

Définition1: *Soit E un ensemble non vide de $\mathbb{R}$,* Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions définie sur E ie $u_n : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \to u_n(x) \end{array}$.

✠ *On apelle série de fonctions sur E de terme général u_n la quantité :*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \overset{\text{noté}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

✠ *On apelle n'ième somme partielle liée à $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la quantité :*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \overset{\text{noté}}{=} S_n \,/\, S_n : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \to S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \end{array}.$$

✠ *On apelle reste d'ordre n de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, la série*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \, , \, R_n : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \to R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \end{array}.$$

.

Définiton2: *Soit $\sum_n u_n$ une série de fonctions sur E de terme général u_n .*

✠ *$\sum_n u_n$ est dite convergente en un point $x_0 \in E$ si $\sum_n u_n(x_0)$ converge, dans le cas contraire elle sera dite divergente en x_0.*

✠ $\sum_n u_n$ *est dite convergente sur* $A \subseteq E$ *si* $\sum_n u_n(x)$ *converge* $\forall x \in A$*, dans ce cas on dira que la série converge simplement sur* A*, dans le cas contraire on dira qu'elle est divergente sur* A*.*

Proposition1: La définition2 peut être énoncée comme suit:

1) $\sum_n u_n$ *converge en* $x_0 \in E \iff \sum_n u_n(x_0)$ *converge.*

$\iff$ la s.n $(S_n(x_0))_n$ converge vers $S(x_0)$, $S(x_0)$ est la somme de la série.numérique.

$\iff \lim_{n\to+\infty} R_n(x_0) = 0$

2) $\sum_n u_n$ *converge sur* $A \subseteq E \iff \sum_n u_n(x)$ *converge* $\forall x \in A$.

$\iff$ la s.n $(S_n(x))_n$ converge $\forall x \in A$ vers $S(x)$, S est la somme de la série.de fonctions.

$\iff \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

Définiton3: *Soit* $\sum_n u_n$ *une série de fonctions sur* E *de terme général* u_n *.*

1) $\sum u_n$ *est dite absolument convergente sur* $A \subseteq E$ *si la série de fonctions* $\sum |u_n|$ *est convergente sur* A*.*

2) $\sum u_n$ *est dite semi-convergente sur* $A \subseteq E$ *si elle est convergente sur* A *sans être absolument convergente sur* A*.*

Remarque: Les théorémes et résultats rencontrés dans le chapitre "séries numériques" peuvent être utiliser dans l'étude de la convergence simple, comme par exemple: la convergence absolue $\Rightarrow$ la convergence simple.

Définiton4: *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série de fonctions sur* E *de terme général* u_n *.*

On appelle <u>*domaine de convergence*</u> *de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *l'ensemble noté* D *et donné par:*

$$D = \left\{ x \in E \,/\, \sum_{n\geq 0} u_n(x) \text{ converge} \right\}, \text{ il peut être égale à } \emptyset \text{ ou } A \subseteq E$$

Exemple: Donner le domaine de convergence de la série de fonctions :

$$\sum_{n\geq 0} u_n \,/\, u_n(x) = x^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

<u>Réponse</u>: On rappelle le résultat rencontré dans le chapitre "séries numériques":
La série numérique $\sum_{n\geq 0} a^n$ où $a \in \mathbb{R}$ converge ssi $|a| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Donc la série de fonctions donnée a pour domaine de convergence simple :

$D =]-1,1[$ et on a pour $\forall x \in D$: $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Et biensûr si $x \in \mathbb{R}\backslash D$ la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

II.2 Convergence uniforme.

Définiton5: *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série de fonctions sur* E *de terme général* u_n et *soit* $(S_n)_n$ *la suite (de fonctions) de ses sommes partielles.*
On dira que $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge uniformément sur* $A \subseteq E$ *si* $(S_n)_n$ *converge uniformément sur* A.

Exemple: Reprendre la série de fonctions :$\sum_{n\geq 0} u_n \,/\, u_n(x) = x^n,\ x \in \mathbb{R}$.
On rappelle qu'elle a pour domaine de convergence simple :$D =]-1,1[$,
et que $\sum_{n\geq 0} u_n = S \,/\, S(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in D$.
1) Y a t-il convergence uniforme sur D?
2) Dans le cas contraire trouver les domaines où il ya convergence uniforme.
Réponse:
1) Soit $(S_n)_n$ la suite ses sommes partielles, elle est définie par: $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
Voyons si $S_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} S$ ie a t-on $\lim_{n\to+\infty} \|S_n - S\| = 0$? Où $\|S_n - S\| = \sup_{x\in]-1,1[} |S_n(x) - S(x)|$.
On a : $|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$ or on remarque que $\lim_{x\to 1^-} \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} = +\infty$ (il est toujours utile de contrôler les borne de l'intervalle car souvent la convergence uniforme y est "faussée"!).
Donc $\sup_{x\in]-1,1[} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{x\to 1^-} |S_n(x) - S(x)| = +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} \|S_n - S\| \neq 0$.
Conclusion1: la série de fonctions :$\sum_{n\geq 0} u_n$ ne converge pas uniformément dans D.
2) ★ D'après la question 1) il n' y a pas de convergence uniforme dans tout intervalle qui contient le voisinage $v(1)$ ($[a,1[$ ou $]a,1[$, $|a| < 1$).

★ De même on a que que $\lim_{x\to -1^+} \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} = \frac{1}{2}$, ie il n' y a pas de convergence uniforme dans tout intervalle qui contient le voisinage $v(-1)$ ($]-1,a]$ ou $]-1,a[$, $|a| < 1$).

★ Il reste à voir s'il ya convergence uniforme sur $[-a,a]$, $0 < a < 1$:
$|S_n(x) - S(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$ $\forall x \in [-a,a]$ ie $|x| < a$ or $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0$.
Conclusion2: $S_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} S$ sur tout intervalle de la forme $[-a,a]$, $0 < a < 1$.

L'exemple précédent permet de compléter la référence vue au niveau du chapitre sur les séries numérique:

Proposition2: (Référence)
La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} x^n$ a pour domaine de convergence $D =]-1,1[$, et pour somme la fonction $S \,/\, S(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.
Elle converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[-a,a]$, $0 < a < 1$.

Définiton6: *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série de fonctions sur* E *de terme général* u_n et *soit* R_n *son* n *ième reste.*
On dira que $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge uniformément sur* $A \subseteq E$ *si* $R_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} \mathbf{0}$ *sur* A *ie* $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\| = 0$.

Théorème1: (Critère de Cauchy pour la convergence uniforme)
Pour qu'une série de fonction sur E : $\sum_{n\geq 0} u_n$ soit uniformément convergente sur $A \subseteq E$ il faut et il suffit que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall m,\ \forall p \geq 1,\ \forall x \in A\ :\ \left[m > N \Rightarrow \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} u_n \right| < \varepsilon \right]$$

ou plus pratiquement on peut écrire:
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall m,\ \forall p \geq 1 \left[m > N \Rightarrow \left\| \sum_{n=m+1}^{m+p} u_n \right\| < \varepsilon \right]$ où
$\left\| \sum_{n=m+1}^{m+p} u_n \right\| = \sup_{x\in A} \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} u_n(x) \right|$.

Théorème2: (CN pour la convergence uniforme)
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions sur E de terme général u_n.

$\sum_n u_n$ converge uniformément sur $A \subseteq E \Rightarrow u_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} \mathbf{0}$ sur A ie $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = 0$

Remarque: C'est la contraposée du théorème précédent qui est la plus utilisée ie: $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| \neq 0 \Rightarrow \sum_n u_n$ ne converge pas uniformément.

Théorème3: (Régle d'Abel pour la convergence uniforme)
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions sur E de terme général u_n, et soit $A \subseteq E$.
Supposons que $u_n = v_n.w_n$, où $(v_n)_n$ et (w_n) deux suites de fonctions vérifiant :
1) $(v_n)_n$ décroissante selon n pour chaque $x \in A$.
2) $v_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} \mathbf{0}$ sur A ie $\lim_{n\to+\infty} \|v_n\| = 0 \,/\, \|v_n\| = \sup_{x\in A} |v_n(x)|$.
3) Pour $S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$, $\exists M > 0$ (indépendant de n et de x) tq $|S_n(x)| \leq M$

$\forall x \in A$.
Alors la série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $A \subseteq E$.

Exemple: Soit $E = [a,b]$ un intervalle ne contenant pas des points de la forme $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}, \text{où } \alpha > 0 \text{ sur } E$$

Réponse:
Utilisons Abel uniforme : Soient $v_n(x) = \frac{1}{n^\alpha}$ et $w_n(x) = \sin(nx),\ u_n = v_n.w_n$.
$\rightsquigarrow$ D'une part $(v_n)_n \searrow$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on remarque que (v_n) est indépendante de x.
$\rightsquigarrow$ D'autre part on a $S_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$, et $|S_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ (référence "séries numériques"), or $\left|\sin\frac{x}{2}\right| \leq 1$ et $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ puisque $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, donc $\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ est bornée, $\exists M = \sup\limits_{x\in E} \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ telle que $|S_n(x)| \leq M\ \forall x \in E$.
Conclusion: la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$, où $\alpha > 0$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,b]$ ne contenant pas des points de la forme $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Remarque: Cette conclusion peut être prise comme référence.

II.3 Convergence normale.

Définiton7: *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions sur E de terme général u_n.*
On dira que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $A \subseteq E$ si la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \|u_n\|$ converge, où $\|u_n\| = \sup\limits_{x\in A} |u_n(x)|$.

Théorème4: Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions sur E de terme général u_n.
$\sum u_n$ converge normalement sur $A \subseteq E \Rightarrow \sum u_n$ converge uniformément sur A.
Preuve: Ceci résulte des critères de Cauchy pour les séries numériques et de fonctions, en effet:

$$\sum \|u_n\| \text{ converge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall m,\ \forall p \geq 1 \left[m > N \Rightarrow \sum_{n=m+1}^{m+p} \|u_n\| < \varepsilon \right],$$

or $\left\| \sum\limits_{n=m+1}^{m+p} u_n \right\| \leq \sum\limits_{n=m+1}^{m+p} \|u_n\|$ on a alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall m,\ \forall p \geq 1 \left[m > N \Rightarrow \left\| \sum_{n=m+1}^{m+p} u_n \right\| < \varepsilon \right].$$

Donc $\sum u_n$ est uniformément convergente sur A.

Théorème5: (Critére de Weirestrass)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions sur E de terme général u_n telle que .

1) $|u_n(x)| \leq c_n$ (indépendant de x) $\forall x \in A$.

2) $\sum_n c_n$ converge (en tant que série numérique à termes positifs).

Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $A \subseteq E$.

<u>**Preuve:**</u> Comme $|u_n(x)| \leq c_n\ \forall x \in A$, alors $\sup_{x\in A} |u_n(x)| \leq c_n \Rightarrow \|u_n\| \leq c_n$.

Puis il suffit d'appliquer le critére de comparaison pour les séries numériques: $\sum_n c_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n \|u_n\|$ converge.

Exemple: Etudier la convergence normale de la série de fonctions :

$$\sum_{n\geq 1} u_n \,/\, u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

<u>Réponse:</u>

Utilisons W : $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ or $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann) $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Proposition: (lien entre les différentes convergences)

Nous avons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \text{CN} & \Rightarrow & \text{CA} \\ \Downarrow & \searrow & \Downarrow \\ \text{CU} & \Rightarrow & \text{CS} \end{array}$$

<u>Remarque:</u> Les implications qui n' y figurent pas n'existent pas!

II.4 Propriétés de la somme d'une série de fonctions.

Théorème6: (Conservation de la continuité)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions sur I de terme général u_n, I étant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, vérifiant:

1) Toutes les fonctions u_n sont continues en $x_0 \in I$.

2) $\sum u_n$ converge uniformément sur I.

Alors la somme F de la série ($F(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$) est continue en x_0.

et on a : $\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n\geq 0} u_n(x) = \sum_{n\geq 0} \lim_{x\to x_0} u_n(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x_0) = F(x_0)$.

Corollaire1: Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions sur I de terme général u_n, I étant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, vérifiant:

1) Toutes les fonctions u_n sont continues sur I.

2) $\sum u_n$ converge uniformément sur I.
Alors la somme F de la série est continue sur I.
Exemple: Soit la série de fonctions : $\sum_{n\geq 0} u_n \ / \ u_n(x) = e^{-nx^n},\ x \geq 1.$
1) Etudier la convergence simple de la série.
2) Montrer que la fonction $F \ / \ F(x) = \sum_{n\geq 0} e^{-nx^n}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

Réponse:
1) En fait il est intéressant de montrer la convergence normale ou uniforme pour en profiter à la question2:
On remarque que $x^n \geq 1 \Rightarrow -nx^n \leq -n \Rightarrow e^{-nx^n} \leq e^{-n},\ /\ \forall x \in [1,+\infty[$ or $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ converge (série géométrique), d'aprés le critère de Weirestrass on a que $\sum_{n\geq 0} e^{-nx^n}$ converge normalement donc uniformément donc simplement sur $[1,+\infty[$.
2) On applique le théorème de conservation de la continuité:
1) Toutes les fonctions u_n sont continues sur $[1,+\infty[$.
2) $\sum u_n$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$.
Alors la somme F de la série est continue sur $[1,+\infty[$.

Théorème7: (Conservation de l'intégrabilité)
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions sur $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, de terme général u_n, vérifiant:
1) Toutes les fonctions u_n sont intégrables sur $[a,b]$.
2) $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.
Alors la somme F de la série est intégrable sur $[a,b]$.
et on a : $\int_a^b F(t)dt = \int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} u_n(t) \right) dt = \sum_{n\geq 0} \left(\int_a^b u_n(t)dt \right).$
Exemple: Soit la série de fonctions : $\sum_{n\geq 0} u_n \ / \ u_n(x) = (-1)^n x^n,\ x \in \mathbb{R}.$
Montrer l'égalité suivante:
$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \ / \ \forall x \in]-1,1[.$$

Réponse:
On rapelle que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ a pour domaine de convergence $D =]-1,1[$, et pour somme la fonction $S \ / \ S(x) = \sum_{n\geq 0}(-x)^n = \frac{1}{1+x}$ (par référence, il suffit de poser $X = -x$).
Et elle converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[-a,a]$, $0 < a < 1$.
Appliquons le théorème7 en particulier sur $[0,x]$, $0 < x < 1$:
1) Toutes les fonctions u_n sont intégrables sur $[-a,a]$, $0 < a < 1$.

2) $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-a,a]$, $0 < a < 1$.
Alors la somme F de la série est intégrable sur $[-a,a]$, $0 < a < 1$,
$\rightsquigarrow$ en particulier F est intégrable sur $[0,x]$, $0 < x < 1$. Alors:
$\int_0^x F(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \sum_{n\geq 0}\left(\int_0^x (-t)^n dt\right) \Leftrightarrow \log(1+x) = -\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$, on obtient:

$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \ / \ \forall x \in [0,1[.$$

$\rightsquigarrow$ de même F est intégrable sur $[x,0]$, $-1 < x < 0$:
$\int_x^0 F(t)dt = \int_x^0 \frac{1}{1+t}dt = \sum_{n\geq 0}\left(\int_x^0 (-t)^n dt\right) \Leftrightarrow -\log(1+x) = -\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$, on obtient:

$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \ / \ \forall x \in]-1,0].$$

On a alors: $\log(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \ / \ \forall x \in]-1,1[$.

Théorème8: (Conservation de la dérivabilité)
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions sur I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, de terme général u_n, vérifiant:
1) Toutes les fonctions u_n sont C^1 sur I.
2) $\exists x_0 \in I$ telle que $\sum u_n(x_0)$ converge.
3) $\sum u_n'$ converge uniformément sur I.
Alors :
a) $\sum u_n$ converge uniformément sur I.
b) La somme F de la série est C^1 sur I et $F'(x) = \left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right)' = \sum_{n\geq 0} u_n'(x)$.

Remarque: La condition 2) et le résultat a) peuvent être supprimés (selon le besoin).

Exemple: Reprendre la série de fonctions : $\sum_{n\geq 0} u_n \ / \ u_n(x) = e^{-nx^n}$, $x \geq 1$.
Montrer que la fonction $F \ / \ F(x) = \sum_{n\geq 0} e^{-nx^n}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$.

Réponse:
Appliquons le théorème de conservation de la dérivabilité:
1) Toutes les fonctions u_n sont C^1 sur $[1,+\infty[$.
2) Etudions la convergence normale éventuelle afin de déduire l'uniforme de $\sum_{n\geq 0} u_n'$.
calculons $\sup_{x\in[1,+\infty[} |u_n'(x)|$ pour cela posons $g_n(x) = |u_n'(x)| = n^2x^{n-1}e^{-nx^n}$,

étudions alors les variations de g_n : $g_n'(x) = n^2 x^{n-2} e^{-nx^n}(n-1-n^2x^n)$,
le signe de $g_n'(x)$ dépend de celui de $(n-1-n^2x^n)$.
Comme $\frac{n-1}{n^2} \leq 1 \leq x^n$ ie $n-1 \leq n^2x^n \Rightarrow g_n'(x) \leq 0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in[1,+\infty[} g_n'(x) = g_n(1) = n^2e^{-n}$.
Donc $\sup\limits_{x\in[1,+\infty[} |u_n'(x)| = n^2e^{-n}$ et la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} n^2e^{-n}$ converge (référence).
On conclut alors la convergence normale donc uniforme de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n'$ sur $[1,+\infty[$.
De 1) et 2) La somme F de la série est C^1 sur $[1,+\infty[$ et

$$F'(x) = \left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right)' = \sum_{n\geq 0} u_n'(x).$$

Le théorème précédent peut s'appliquer autant de fois que nécéssaire, ceci nous permet de donner le corollaire suivant.

Corollaire2: Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions sur I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, de terme général u_n, vérifiant:
1) Toutes les fonctions u_n sont C^k sur I.
2) $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur I.
Alors : La somme F de la série est C^k sur I et $F^{(k)}(x) = \sum\limits_{n\geq 0} u_n^{(k)}(x)$.

III. SERIES ENTIERES.

Définition1: *On appelle série entière une série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ de terme général u_n telle que $u_n(x) = a_n(x-x_0)^n$* où *x_0 est un réel fixé et $(a_n)_n$ une suite numérique réelle.*

Exemple: Donner le domaine de convergence de la série entière : $\sum\limits_{n\geq 0}(x-x_0)^n$.

Réponse:
En fait $a_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, c'est une série géométrique de raison $(x-x_0)$, elle converge simplement sur $D =]x_0-1, x_0+1[$ vers sa somme $S / S(x) = \frac{1}{1-(x-x_0)}$ et converge uniformément sur tout $[\alpha,\beta] \subset D$.

Remarques:
1) Le domaine de convergence d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ n'est jamais vide, il contient au moins x_0.
2) L'exemple précédent nous montre qu'il suffit d'étudier les séries entières de la forme $\sum\limits_{n\geq 0} a_nx^n$, il suffira ensuite de poser $y = (x-x_0)$ afin de généraliser les résultats à celles de la forme: $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$.

Mme Achour.

Théorème1: (1er lemme d'Abel)
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière convergente en un point $x_1 \in \mathbb{R}^*$, alors elle est absolument convergente $\forall x \,/\, |x| < |x_1|$, ie elle converge absolument sur $]-|x_1|, |x_1|[$.

<u>**Preuve:**</u> $\sum_{n\geq 0} a_n x_1^n$ converge
$\overset{\text{CN}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} a_n x_1^n = 0 \iff \left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N \Rightarrow |a_n x_1^n| < \varepsilon\right]$.
Soit $x \,/\, |x| \leq |x_1|$, alors $|a_n x^n| = |a_n x_1^n|.\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N$:
$|a_n x^n| < \varepsilon \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$, or $\sum_{n\geq 0} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ converge (série géométrique de raison $0 < \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$).
On obtient que $\sum_{n\geq N} a_n x^n$ converge par le critère de comparaison.
On en conclut que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge sur $]-|x_1|, |x_1|[$.

Corollaire1: Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière divergente en un point $x_1 \in \mathbb{R}$, alors elle est divergente $\forall x \,/\, |x| > |x_1|$.
Corollaire2: Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière convergente sur un intervalle $]-a, a[$ alors elle est normalement convergente sur tout $[-r, r] \subset]-a, a[$ (et même sur tout $[\alpha, \beta] \subset]-a, a[$).

III.1 Rayon et domaine de convergence:

Définition2: *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière, soit D son domaine de convergence.*
On appelle rayon de convergence de la série entière la quantité notée R et donnée par:

$$R = \sup\left\{ |x| \,/\, \sum_{n\geq 0} a_n x^n \textit{ converge} \right\} = \sup\{ |x| \,/\, x \in D \}$$

Exemple: Donner le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{n\geq 0} x^n$.

<u>Réponse:</u>
Comme $D =]-1, +1[\Rightarrow R = \sup\{|x| \,/\, x \in D\} = 1$.

Théorème2: (Théorème de Hadamard)
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, on pose :
$\rho = \limsup_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$.
Nous avons alors les résultats suivants:

1) $\rho = 0 \;\Rightarrow\; R = +\infty$.
2) $\rho = +\infty \;\Rightarrow\; R = 0$.
3) $0 < \rho < +\infty \;\Rightarrow\; R = \frac{1}{\rho}$.

Remarque: On rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = l$.

Exemple: Calculer le rayon R de convergence de la série entière : $\sum\limits_{n\geq 1} e^{n\cos n}.x^n$.

Réponse:
Soit $a_n = e^{n\cos n} > 0$. Utilisons le théorème de Hadamard et calculons
$\rho = \limsup\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$:
Comme $\sqrt[n]{|a_n|} = e^{\cos n}$ et
$\limsup\limits_{n\to+\infty} (\cos n) = 1 \;\Rightarrow\; \rho = \limsup\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = e \overset{H}{\Rightarrow} R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{e}$.

Théorème3: (Caractérisation du rayon)
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Nous avons alors les résultats suivants:
1) $R = 0 \;\Leftrightarrow\; D = \{0\}$.
2) $R = +\infty \;\Leftrightarrow\; D = \mathbb{R}$.
3) Si $0 < R < +\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \,/\, |x| < R \text{ (ie } x \in]-R, R[) \;:\; \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ converge absolument.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \,/\, |x| > R \text{ (ie } x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[) \;:\; \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ diverge}$$

Remarque: Dans le cas où $0 < R < +\infty$, le théorème2 ne donne pas la nature en $x = \pm R$, il faudrait donc étudier les séries numériques $\sum\limits_{n\geq 0} a_n R^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (-R)^n$.

Exemple: Donner le domaine D de convergence de la série entière :
$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$.

Réponse:
1) Calcul du rayon R de la série entière: soit
$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)} > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+4)} = 1 \;\Rightarrow\; \rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = 1$.
D'après le théorème de Hadamard : $R = \frac{1}{\rho} = 1$.
Remarque: a_n est une fraction de polynome ou un polynome alors $R = 1$.
Si 2) Etude aux bornes:
$\rightsquigarrow$ En $x = 1$: $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ converge ($\frac{1}{(n+1)(n+3)} \underset{v(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2}$, Riemann $+$ l'équivalence).
$\rightsquigarrow$ En $x = -1$: $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)n}{(n+1)(n+3)}$ converge

$\left(\left|\dfrac{(-1)n}{(n+1)(n+3)}\right| \underset{v(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n^2}\right.$, convergence absolue).
Conclusion: $D = [-1,1]$.

Définition3: *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R.
L'intervalle noté $\Delta =]-R,R[$ *est appelé intervalle de convergence de la série entière.*

Théorème4:
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et $\Delta =]-R,R[$ son intervalle de convergence.
Elle est normalement (donc uniformément) convergente sur tout $[-r,r] \subset \Delta$ (et même sur tout $[\alpha,\beta] \subset \Delta$).

Proposition1: Soient $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Nous avons alors les résultats suivants:
1) $|a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$.
2) $|a_n| \underset{v(+\infty)}{\sim} |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$.

<u>Preuve:</u>
1) Supposons que $|a_n| \leq |b_n|$ et montrons que $]-R_b,R_b[\subseteq]-R_a,R_a[$.
Soit $x \in]-R_b,R_b[$ ie $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ converge absolument, or $|a_n x^n| \leq |b_n x^n| \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument (donc converge), ie $x \in]-R_a,R_a[$. On en conclut que $R_a \geq R_b$.
2) Supposons que $|a_n| \underset{v(+\infty)}{\sim} |b_n|$ et montrons que $R_a = R_b$.
On a
$|a_n| \underset{v(+\infty)}{\sim} |b_n| \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| = 1 \Rightarrow \left[\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N \Rightarrow \left|\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| - 1\right| < \varepsilon\right]$.
ie $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N \Rightarrow (1-\varepsilon)|b_n| < |a_n| < (1+\varepsilon)|b_n|$, choisissons par exemple $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.
Donc pour n >>: $\dfrac{1}{2}|b_n| \underset{(1)}{<} |a_n| \underset{(2)}{<} \dfrac{3}{2}|b_n|$ et appliquons 1) :
L'inégalité (1) donne $R_a \leq R_b$ et l'inégalité (2) donne $R_a \geq R_b$. On en conclut que $R_a = R_b$.

Proposition2: Soient $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, et soient $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$ et $\sum_{n\geq 0} w_n x^n$ leurs séries somme et produit de rayons respectifs R_S et R_P. Nous avons alors les résultats suivants:
1) $R_S \geq \inf(R_a,R_b)$ et $R_P \geq \inf(R_a,R_b)$.

2) Si $R_a \neq R_b$ alors $R_S = \inf(R_a, R_b)$.

Exemple: Calculer le rayon de convergence de la série entière :
$\sum_{n\geq 1}(\cos^2 n + e^{n\cos n})x^n$.

Réponse:

1) Calculons R_a le rayon de convergence de : $\sum_{n\geq 1}\cos^2 n.x^n$.

Posons $a_n = \cos^2 n$, $|a_n| \leq 1 \overset{\text{Prop1}}{\Rightarrow} R_a \geq 1$ (car la s.e $\sum_{n\geq 1} 1.x^n$ a pour rayon 1),

or en $x = 1$ la série $\sum_{n\geq 1}\cos^2 n$ diverge (CN non vérifiée) $\overset{\text{Coro.1}}{\Rightarrow} R_a \leq 1 \Rightarrow R_a = 1$.

2) Soit R_b le rayon de convergence de : $\sum_{n\geq 1} e^{n\cos n}.x^n$,$R_b = \frac{1}{e}$ (déja fait).

Comme $R_a \neq R_b$ alors $R = \inf(R_a, R_b) = \frac{1}{e}$.

GENERALISATION.

Plus généralement on considère une série entière de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$.

1) Son rayon de convergence est celui de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, il sera noté R.

★ $R = 0 \Leftrightarrow D = \{0\}$.

★ $R = +\infty \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

★ Si $0 < R < +\infty$:

$\forall x \in \mathbb{R} / |x-x_0| < R$ (ie $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$) : $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ converge absolument.

$\forall x \in \mathbb{R} / |x-x_0| > R$ (ie $x \in]-\infty, x_0 - R[\cup]x_0 + R, +\infty[$) : $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ diverge

3) Son intervalle de convergence est $\Delta =]x_0 - R, x_0 + R[$ et $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ est normalement (donc uniformément) convergente sur tout $[-r, r] \subset \Delta$ (et même sur tout $[\alpha, \beta] \subset \Delta$).

III.2 Propriétes de la somme d'une série entière:

Théorème5: Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et $\Delta =]-R, R[$ son intervalle de convergence.
Alors sa somme est continue sur Δ.

Preuve:

On rappelle qu'elle est uniformément convergente sur tout intervalle $[a, b] \subset]-R, R[$, donc d'aprés le théorème de conservation de la continuité: sa fonction somme S est continue sur tout intervalle $[a, b] \subset]-R, R[$.
On en conclut que S est continue sur Δ.

Théorème6: Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme S sur son intervalle de convergence $\Delta =]-R, R[$. Et soient :

$\rightsquigarrow$ $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ la série entière obtenue par dérivation terme à terme.

$\rightsquigarrow$ $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ la série entière obtenue par intégration terme à terme.

Alors on a :

1) Les trois séries entières ont même rayon de convergence, ie $R = R_1 = R_2$.

2) $S'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $\int_0^x S(t)dt = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Preuve:

1) Supposons que $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R_1, comme

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$:

$$\limsup_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|n a_n|}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} . \limsup_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \limsup_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \Rightarrow R = R_1.$$

De même, Supposons que $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R_2,

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = 1$:

$$\limsup_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n+1} a_n\right|}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} . \limsup_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \limsup_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \Rightarrow R = R_2$$

2) Il suffit d'appliquer les théorèmes de conservation de la dérivabilité et de l'intégrabilité:

★ Toutes les u_n / $u_n(x) = a_n x^n$ sont C^∞ sur $]-R, R[$ (donc en particulier intégrables).

★ $\sum\limits_{n\geq 0} u_n'$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[a,b] \subset]-R,R[$, car son rayon de convergence est R.

★ $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[a,b] \subset]-R,R[$.

Donc la somme S est dérivable et inté grable et on a :

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} \text{ et } \int_0^x S(t)dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Remarque:Si dans le théorème6 on a la série entière $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n x^n$ / $n_0 \geq 1$ alors

$S'(x) = \sum\limits_{n\geq n_0} n a_n x^{n-1}$.

Corollaire3: Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme S sur son intervalle de convergence $\Delta =]-R, R[$.

Alors $S \in C^\infty(]-R,R[)$ et $S^{(k)}(x) = \sum\limits_{n\geq k} n(n-1)\ldots(n-(k-1)) a_n x^{n-k}$.

Théorème6: (Second lemme d'Abel)
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0,+\infty[$ et de somme S sur son intervalle de convergence $\Delta =]-R,R[$.

$\rightsquigarrow$ Si $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ converge alors S est continue à gauche de $x = R$ ie $\lim_{x\to R^-} S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n R^n$.

$\rightsquigarrow$ Si $\sum_{n\geq 0} a_n(-R)^n$ converge alors S est continue à droite de $x = -R$ ie $\lim_{x\to -R^+} S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(-R)^n$.

Exemple: Calculer le rayon R ainsi que la somme S de la série entière : $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.

Réponse:

1) Calcul du rayon R de la série entière: soit $a_n = \frac{1}{n} > 0, \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \Rightarrow \rho = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = 1$.

D'après le théorème de Hadamard : $R = \frac{1}{\rho} = 1$ (on aurait pu dire que a_n est une fraction de polynome donc $R = 1$.

2) Etude aux bornes:

$\rightsquigarrow$ En $x = 1$: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (Riemann).

$\rightsquigarrow$ En $x = -1$: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)n}{n}$ converge (Leibnitz).

Conclusion: $D = [-1,1[$

3) D'après le théorème6: $S'(x) = \sum_{n\geq 1} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} x^n$, ie $S'(x) = \frac{1}{1-x}$ $\forall x \in]-1,1[$ (série géométrique). D'où $S(x) = -\log(1-x) + C$, or $S(0) = \sum_{n\geq 1} \frac{0^n}{n} = 0$.

Donc $S(x) = -\log(1-x)$ $\forall x \in]-1,1[$.

De plus $\sum_{n\geq 0} a_n(-1)^n$ converge alors d'après le théorème 6 :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x\to -1^+} S(x) = -\log 2.$$

Conclusion: $S(x) = -\log(1-x)$ $\forall x \in [-1,1[$.

III.3 Séries de Taylor.

Dans tout ce paragraphe on considérera $x_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction $f \in C^\infty$ au $v(x_0)$. On cherchera à répondre à la question suivante:

Sous quelles conditions a t-on $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$?

Définition4: *On appelle série de Taylor de f au point x_0 la série entière*

$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Proposition3: Soit une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ qui a pour somme S sur son intervalle de convergence $]x_0-R, x_0+R[$, alors $a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Preuve:

On rapelle que $S \in C^{\infty}(]-R,R[)$ et

$S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\ldots(n-(k-1))a_n x^{n-k} \Rightarrow S^{(n)}(x) = n!a_n$.

Corollaire4: Toute série entière est la série de Taylor de sa somme.

Preuve:

On a que $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n \,/\, a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!} \Rightarrow S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Rappel: Le développement de Taylor de f à l'ordre n DT$_n$ au $v(x_0)$ est donné par:

$$f(x) \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n + R_n(x).$$

Où $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x-\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \,/\, \theta \in]0,1[$, $R_n(x)$ est le reste du DT$_n$.

Théorème7: Supposons que $f \in C^{\infty}]x_0-R, x_0+R[$.

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ \forall x \in]x_0-R, x_0+R[\text{ ssi } \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0.$$

Preuve:

Evidente, il suffit de passer à la limite dans l'égalité $(*)$.

Théorème8: Soit $f \in C^{\infty}]x_0-R, x_0+R[$, s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall x \in]x_0-R, x_0+R[,\ \forall n \in \mathbb{N} : |f^{(n)}(x)| \leq M$$

Alors $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ \forall x \in]x_0-R, x_0+R[$.

Preuve:

Il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. On a $|R_n(x)| \leq M.\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$,

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, pour cela il suffit de considérer la série numérique associée: $\sum_{n\geq 0} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$, elle est convergente (d'après la régle de D'Alembert par exemple) $\overset{\text{CN}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Exemple: Donner le DSE de $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

<u>Réponse:</u>

1) On a que $|f^{(n)}(x)| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ ie
$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \forall x \in \mathbb{R}$.

2) $g(x) = \log(1+x) - \log(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} \ \forall x \in]-1,1[$ (voir formulaire). D'où $g(x) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n} \right) x^n \ \forall x \in]-1,1[$. Comme

$$\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n} \right) = \begin{cases} \frac{2}{n} \text{ si } n = 2k+1 \\ 0 \text{ si } n = 2k \end{cases}.$$

On obtient alors $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \ \forall x \in]-1,1[$.