Chapitre : **Séries numériques.**

Introduction générale:

Le but de ce chapitre est de définir ce qu'est une série numérique et ce que veut dire qu'elle converge, on donnera notament un sens à une somme infinie de nombres, il y aura beaucoup de similitude avec les intégrales généralisées.

I.DEFINITIONS ET PREMIERES PROPRIETES.

I.1 Définitions.

Définition1: *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique réelle.*

✠ *On apelle série numérique réelle de terme général* u_n *la quantité :*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \overset{\text{noté}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

✠ *On apelle n'ième somme partielle liée à* $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ *la quantité :*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \overset{\text{noté}}{=} S_n.$$

✠ *On dira que* $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ *converge si et seulement si sa suite de sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ie ssi* $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et est finie.

Dans ce cas on apelle somme de la série sa limite S *et l'on note:*

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Dans le cas contraire on dira que la série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ *diverge.*

Remarque1: Une série numérique peut être donnée sous la forme $\sum_{k\geq n_0} u_k$ avec $n_0 \geq 1$ on posera simplement $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_n$ et la définition1 reste valable, on notera donc souvent $\sum_n u_n$ sans préciser l'indice initial.

Exemple: Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ $(n \geq 1)$.

Réponse:

On remarquera que $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ $\forall\, n \geq 1$. Calculons (si elle existe) $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ cette somme est dite "simplifiable".

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 = S$ existe, alors la série numérique converge et on a $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

Définition2: *Soit* $\sum_n u_n$ *une série numérique de terme général* u_n *.*

✠ *La série* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *est apelée reste d'ordre* n *de la série donnée.*

✠ *Si* $\sum_n u_n$ converge vers S *alors on aura* $R_n = S - S_n$ et donc $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

I.2 Propriétés.

Théorème1: (Opérations)

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries numériques réelles convergentes respectivement vers S et T. Alors:

✠ La série de terme général $(u_n + v_n)$ est convergente et on a
$\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n) = \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n = S + T.$

✠ La série de terme général λu_n $(\lambda \in \mathbb{R})$ est convergente et on a
$\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n = \lambda S.$

Théorème2: (CN)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique on a :

$$\sum_n u_n \text{ converge } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

<u>**Preuve:**</u> On a que $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n$ et $S_{n-1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ $\Rightarrow$
$u_n = S_n - S_{n-1}$,
comme $\sum_n u_n$ converge alors $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}$, ce qui donne $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque2: La proposition2 est la condition nécessaire de convergence d'une série (CN), mais elle n'est pas suffisante!

Exemple: Déterminer la nature des séries numériques de terme général

$$u_n = (-1)^n,\ v_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

<u>Réponse</u>:

1) On a $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 1 \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \overset{\text{CN}}{\Rightarrow} \sum_n u_n$ diverge.

2) On a que $v_n = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n \ \ \forall\, n \geq 1$. Calculons (si elle existe) $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

$S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + \ldots + (\log(n+1) - \log n) = \log(n+$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, alors la série numérique donnée diverge.

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et pourtant $\sum\limits_n v_n$ diverge!

Remarque3: Dans le 2) de l'exemple nous avons utilisé une somme "simplifiable" afin de calculer S_n nous pouvons aussi utiliser les sommes géométriques comme le montre l'exemple qui va suivre.

Exemple: Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = a^n$ où a est une constante réelle quelconque.

Réponse:

Calculons (si elle existe) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 1 + a + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. On rapelle que $(a^n)_n$ est un suite géométrique qui converge ssi $a \in]-1,1[$, en fait on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 \text{ si } |a| < 1 \\ 1 \text{ si } a = 1 \\ +\infty \text{ si } a > 1 \\ \text{n' } \nexists \text{ sinon} \end{cases}$

1er cas: $|a| \geq 1$. La CN nous donne que $\sum\limits_n u_n$ diverge puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

2ème cas: $|a| < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$ donc la série converge vers $\frac{1}{1-a}$.

L'exemple précédent nous permet d'énoncer le résultat suivant:

Proposition: (Référence1)

La série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ où $a \in \mathbb{R}$ converge ssi $|a| < 1$ et dans ce cas $\sum\limits_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Théorème3: (Décalage)

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série numérique de terme général u_n. Alors:

1) $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow \forall k \geq 1 : \sum\limits_{n\geq k} u_n$ converge.

2) $\exists k \geq 1 \,/\, \sum\limits_{n\geq k} u_n$ converge $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

Preuve: On a que

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \underbrace{u_0 + \ldots + u_{k-1}}_{S_{k-1}} + \underbrace{u_k + \ldots + u_n}_{S_{k,n}} \Rightarrow S_n = S_{k-1} + S_{k,n}$.

Les assertions 1) et 2) découlent de cette dérnière égalité en passant à la limite qd $n \to +\infty$ et on aura que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq k} u_n$ sont de même nature $\forall k \geq 1$.

Remarque4: La nature d'une série numérique ne change pas si l'on modifie un nombre fini de ses termes.

II.CRITERES DE CONVERGENCE POUR LES SERIES POSITIVES.

Dans tout ce paragraphe, on considèrera une série numérique à termes positifs ie son terme général $u_n \geq 0\ \forall n \geq n_0$.

II.1 CRITERE DE MAJORATION.

Théoréme1: Pour qu'une série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ soit convergente il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles $(S_n)_n$ soit majorée.
Preuve: On a que $(S_n)_n$ est croissante, en effet: $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$.
Donc $\left[(S_n)_n \text{ converge } \Leftrightarrow (S_n)_n \text{ majorée}\right]$.

Corollaire: $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On a donc les notations suivantes :

✠ Si $\sum u_n$ converge, on notera $\sum u_n < +\infty$.
✠ Si $\sum u_n$ diverge, on écrira $\sum u_n = +\infty$.

Exemple: Déterminer la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$.

Réponse:
On a que $u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ et $u_n < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\ \forall\, n \geq 1$.

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}$

ie $S_n < 2\ \forall n \geq 0$. *Donc* $(S_n)_n$ majorée par 2 alors la série numérique donnée est convergente et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2$.

En fait on a montré que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (il suffit de poser $N = n+1$)

II.2 CRITERE DE COMPARAISON.

Théoréme2:
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques telle que $0 \leq u_n \leq v_n\ \forall n \geq n_0$ alors on a :
1) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve: Soient S_n et T_n les nièmes sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ respectivement.
1) Supposons $\sum v_n$ converge alors $(T_n)_n$ est majorée par sa somme T ie $T_n \leq T$.
Comme $0 \leq u_n \leq v_n$ alors $0 \leq S_n \leq T_n \leq T$ ie $(S_n)_n$ est majorée par T.
Donc $\sum u_n$ converge.

2) En fait il suffit d'écrire la contraposée de 1) et on retrouve 2).

Exemple: Déterminer la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^n}$.

Réponse:

On a que $u_n = \frac{1}{n^n} \geq 0$ et $u_n \leq \frac{1}{2^n}$ $\forall\, n \geq 2$ car $n^n \geq 2^n$ $\forall\, n \geq 2$,

or $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge (série géométrique) $\overset{\text{comp}}{\Rightarrow} \sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

II.3 CRITERE D'EQUIVALENCE.

Théoréme3:

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques à termes positifs telle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Alors les deux séries sont de même nature.

Preuve: Il suffit d'utiliser la définition de $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n \geq N \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon$.

Prenons par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Alors $\exists N > 0,\ \forall n \geq N \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \frac{1}{2}$

$$n \geq N \left[\begin{array}{l} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n \text{ (car } v_n \text{ est positive)} \end{array}\right.$$

Puis il suffit d'appliquer le critère de comparaison.

Exemple: Déterminer la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 + 4n - 3}$.

Réponse:

On a que $u_n = \frac{1}{n^2 + 4n - 3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geq 0$ et comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge $\overset{\text{equi}}{\Rightarrow} \sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

On rapelle que l'on avait précédement montré que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge .

II.4 REGLE DE CAUCHY.

Théoréme4:

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ existe $(0 \leq l \leq +\infty)$, alors ona :.

1) Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2) Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
3) Si $l = 1$ on ne peut rien dire, c'est le cas douteux.

Preuve:

1er cas: $0 \leq l < +\infty$. On a que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}}$

$$\Leftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N \Rightarrow \left|(u_n)^{\frac{1}{n}} - l\right| < \varepsilon\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N \Rightarrow (l-\varepsilon) \underset{(1)}{<} (u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{(2)}{<} (l+\varepsilon)\right]$$

1) Supposons que $l < 1$ et utilisons l'inégalité (2), il suffit de choisir $\varepsilon > 0 / l + \varepsilon < 1$ (ceci est toujours possible) on obtient $u_n < (l+\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$ avec $\sum (l+\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$ étant une série géométrique convergente $\overset{\text{comp}}{\Rightarrow}$ $\sum u_n$ converge.

2) Supposons que $l > 1$ et utilisons cette fois l'inégalité (1), il suffira de choisir $\varepsilon > 0 / l - \varepsilon > 1$ on obtient $(u_n)^{\frac{1}{n}} > l - \varepsilon > 1$ ie $u_n > 1\ \forall n \geq N$ ce qui donne:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \overset{\text{CN}}{\Rightarrow} \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.

2ème cas: $l = +\infty$. On a que

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = +\infty \Leftrightarrow \left[\forall A > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N \Rightarrow (u_n)^{\frac{1}{n}} > A\right]$

Ce qui donne $u_n > A^n$, il suffit de prendre $A > 1$ et donc $\sum A^n$ diverge (série géométrique) $\overset{\text{comp}}{\Rightarrow}$ $\sum u_n$ diverge.

Exemple: Déterminer la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Réponse:

On a que $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \geq 0$, utilisons la régle de Cauchy:

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \overset{\text{R.C}}{\Rightarrow} \sum u_n$ converge.

Remarque: Il est conseillé d'utiliser la régle de Cauchy lorsque le terme général présente des puissances en n.

I.4 REGLE DE D'ALEMBERT.

Théoréme5: Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ existe $(0 \leq l \leq +\infty)$, alors ona :.

1) Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

2) Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

3) Si $l = 1$ on ne peut rien dire, c'est le cas douteux.

Exemple: Déterminer la nature des séries numériques $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3^n}{5!n!}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2^n}{n}$.

Réponse:

1) On a que $u_n = \frac{3^n}{5!n!} \geq 0$, utilisons la régle de D'Alembert:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}}{5!(n+1)!}\cdot\frac{5!n!}{3^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{(n+1)}=0<1\overset{\text{R.A}}{\Rightarrow}\sum u_n \text{ converge.}$$

2) On a que $v_n=\dfrac{2^n}{n}\geq 0$, utilisons la régle de D'Alembert:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)}\cdot\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{(n+1)}=2>1\overset{\text{R.A}}{\Rightarrow}\sum v_n \text{ diverge.}$$

Remarque: Il est conseillé d'utiliser la régle de D'Alembert lorsque le terme général présente des factoriels.

Proposition1: Soit $(u_n)_n$ une suite numérique réelle à termes positifs, ona :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$ existe alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=l.$

I.5 CRITERE INTEGRALE.

Théoréme6: Soit $f:[0,+\infty[\ \to\ \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante, on a:

$$\sum_{n\geq 0} f(n) \text{ converge ssi } \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ converge.}$$

Preuve:

Comme $f\searrow$ pour tout $x\in[n,n+1[\ (n\in\mathbb{N})\Rightarrow f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$

puis il suffit d'intégrer sur $[n,n+1[$ $\displaystyle\int_n^{n+1} f(n+1)dx\leq\int_n^{n+1} f(x)dx\leq\int_n^{n+1} f(n)dx$

on obtient alors $f(n+1)\leq\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx\leq f(n)\ \forall n\in\mathbb{N}.$

$$n=0:\ f(1)\leq\int_0^1 f(x)dx\leq f(0).$$

$$n=1:\ f(2)\leq\int_1^2 f(x)dx\leq f(1).$$

$$\dots$$

$$n=k:\ f(k+1)\leq\int_k^{k+1} f(x)dx\leq f(k)$$

Après sommation on aura: $f(1)+f(2)+\ldots+f(k+1)\leq\displaystyle\int_0^{k+1} f(x)dx\leq f(0)+f(1)+\ldots+f(k).$

ie $\displaystyle\sum_{n=1}^{k+1} f(n)\leq\int_0^{k+1} f(x)dx\leq\sum_{n=0}^{k} f(n)$ puis il suffira d'utiliser le critére de majoration pour les intégrales généralisées ainsi que pour les séries numériques.

Remarque: Le théoréme reste valable si $f : [a,+\infty[\ \to \ \mathbb{R}_+,\ a \in \mathbb{N}^*$ grâce au théorème de décalage.

I.6 REGLES DE RIEMANN ET DE BERTRAND.

Celles-ci sont une conséquence dirécte du critère intégrale.

Théoréme7: (Référence2)

1) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ converge ssi $\alpha > 1$.

2) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ converge ssi $\left[\left(\alpha > 1,\ \beta \text{ quelconque}\right) \text{ ou } \left(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\right)\right]$.

Preuve:

1) 1er cas: $\alpha > 0$. Posons $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \geq 0$, $f : [1,+\infty[\ \to \ \mathbb{R}_+$, f vérifie les conditions du critère intégrale, en effet :

$\rightsquigarrow$ f est continue $(f(x) = e^{-\alpha \log x})$ comme composée de fonctions continues,

$\rightsquigarrow$ De plus $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \geq 0 \Rightarrow g \nearrow \ / g(x) = x^\alpha \Rightarrow f \searrow$.

Donc $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de la même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ qui converge ssi $\alpha > 1$.

2ème cas: $\alpha \leq 0$. Posons $u_n = \frac{1}{n^\alpha} = e^{-\alpha \log n}$ avec $(-\alpha) \geq 0$, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ +\infty \text{ si } -\alpha > 0 \end{cases}$ ie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0\ \forall \alpha \leq 0 \overset{\text{CN}}{\Rightarrow} \sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.

On en conclut $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

2) En exercice.

Exemple: Déterminer la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} \log\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

Réponse:

On a que $u_n = \log\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \geq 0$, $u_n = \log\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right) = \log\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$.

Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ or $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Riemann) $\overset{\text{equi}}{\Rightarrow}$ $\sum u_n$ diverge.

I.7 REGLE DE L'ORDRE.

Théoréme8: Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs

1) S'il existe $\alpha > 1$ tq :$\lim\limits_{t\to+\infty} n^\alpha u_n = 0^+$ alors $\sum u_n$ converge.

2) S'il existe $\alpha \leq 1$ tq :$\lim\limits_{t\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.

Preuve: en exercice, elle est analogue à celle déja faite au niveau des intégrales généralisées.

Proposition2: (Référence3)

La série numérique $\sum n^{\alpha}e^{\beta n}$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$) converge ssi $\beta < 0$.

III.CAS DES SERIES DE SIGNE QUELCONQUE.

III.1 CRITERE DE CAUCHY.

Théoréme1: Pour qu'une série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ soit convergente il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles $(S_n)_n$ soit une suite de Cauchy, ie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall m,\ \forall n\ \left[m > N,\ n > N \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon\right]$$

ou plus pratiquement on peut écrire:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall m,\ \forall p \geq 1\ \left[\ m > N \Rightarrow \left|\sum_{n=m+1}^{m+p} u_n\right| < \varepsilon\ \right]$$

Exemple: Montrons en utilisant le critère de Cauchy que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Réponse:

On a que $\sum\limits_{n=m+1}^{2m} u_n = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m} > \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$

Donc pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\forall N,\ \exists m > N,\ \exists p = m > N$ tq $\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} u_n\right| > \varepsilon$ ce qui montre que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ n'est pas de Cauchy, on en déduit que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

III.2 CONVERGENCE ABSOLUE.

Définition1:

1) Une série numérique $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

2) Une série numérique $\sum u_n$ est dite semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.

Théorème2: $\sum |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

Preuve: Ceci résulte diréctement du critère de Cauchy, en effet:

$\sum |u_n|$ converge $\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall m,\ \forall p \geq 1 \left[\ m > N \Rightarrow \left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} |u_n|\right| < \varepsilon\ \right]$,

ie $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall m,\ \forall p \geq 1 \left[\ m > N \Rightarrow \sum\limits_{n=m+1}^{m+p} |u_n| < \varepsilon\ \right]$, or $\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} u_n\right| \leq \sum\limits_{n=m+1}^{m+p} |u_n|$

on a alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall m,\ \forall p \geq 1 \left[\ m > N \Rightarrow \left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} u_n\right| < \varepsilon\ \right]$.

Donc $\sum u_n$ est de Cauchy ce qui implique qu'elle est convergente.

Remarque: Il est clair que l'on peut utiliser les critéres pour les séries à termes positifs dans l'étude de la convergence absolue.

III.3 REGLE D'ABEL.

Théorème3: Abel 1
Supposons que $u_n = v_n.w_n,$ où $(v_n)_n$ et (w_n) vérifient les conditions suivantes :
1) $(v_n)_n$ décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$
2) $\exists M > 0$ tq $|S_n| \leq M$ où $S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$
Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Corollaire: Abel 2
Supposons que $u_n = v_n.w_n,$ où $(v_n)_n$ et (w_n) vérifient les conditions suivantes :
1) $(v_n)_n$ monotone et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l,\ l \in \mathbb{R}.$
2) $\sum w_n$ est convergente.
Alors la série $\sum u_n$ est convergente.
<u>**Preuve:**</u>
$\rightsquigarrow$ Supposons $(v_n)_n \searrow$ Alors la suite $(v_n - l)$ vérifie la première condition d'Abel1.
D'autre part $\sum w_n$ étant convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ (existe et est finie), appliquons la définition :

$$\left[\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ n \geq N \Rightarrow |S_n - S| < \varepsilon\right].$$
$$\Leftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ n \geq N \Rightarrow S - \varepsilon < S_n < S + \varepsilon\right]$$
$$\Leftrightarrow \exists M > 0 \,/\, \forall n \geq N \Rightarrow |S_n| \leq M$$

Alors w_n vérifie la deuxième condition d'Abel 1 alors $\sum (v_n - l)w_n$ converge, on obtient que $\sum v_n w_n$ est aussi convergente.

$\rightsquigarrow$ Supposons $(v_n)_n \nearrow$, il suffit de travailler avec $(-v_n)_n \searrow$.

Exemple: Etudier la nature (convergence absolue et semi-convergence) de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^\alpha}, \text{où } \alpha \text{ est un paramétre réel}$$

<u>Réponse:</u>
1) $\textsc{Convergence}$:
<u>1er cas:</u> $\alpha > 0$, utilisons Abel1. Soient $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $w_n = \sin n,\ u_n = v_n.w_n.$
$\rightsquigarrow$ D'une part $(v_n)_n \searrow$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$
$\rightsquigarrow$ D'autre part on a
$S_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n,\ w_n = \sin n = \mathrm{Im}(e^{in}) \Rightarrow S_n = \mathrm{Im}(e^i + e^{2i} + \ldots + e^{in}).$
Donc

$$S_n = \mathrm{Im}\left(e^i \frac{1-e^{in}}{1-e^i}\right) \Rightarrow \underbrace{|S_n|}_{\text{valeur absolue}} \leq \underbrace{\left|e^i \frac{1-e^{in}}{1-e^i}\right|}_{\text{module}} \leq |e^i| \frac{|1-e^{in}|}{|1-e^i|} \leq \frac{1+|e^{in}|}{|1-e^i|} \leq \frac{2}{|1-e^i|}.$$

Calculons en détail $M = \dfrac{2}{|1-e^i|}$:

$$M = \frac{2}{|1-\cos 1 - i\sin 1|} = \frac{2}{\sqrt{(1-\cos 1)^2 + \sin^2 1}} = \frac{2}{\sqrt{2-2\cos 1}} = \frac{2}{2\sqrt{\frac{1-\cos 1}{2}}} = \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}\right|}.$$

Finalement $\sum u_n$ converge par Abel1.

Rappel:

- 1) Soient $z,\ z' \in \mathbb{C} \,/\, z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$
- ♣ $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}\,z + \mathrm{Re}\,z',\ \mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}\,z + \mathrm{Im}\,z'$
- ♣ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}\,,\ |a| = \mathrm{Re}\,z \leq |z|,\ |b| = \mathrm{Im}\,z \leq |z|$
- ♣ $|z.z'| = |z|.|z'|$
- 2) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,\ |e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

2ème cas: $\alpha = 0$, utilisons la CN.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin n$ n'$\nexists$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0,$ on en déduit $\sum u_n$ diverge.

3ème cas: $\alpha < 0$, de même utilisons la CN.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\alpha}\sin n$ n'$\nexists$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n$ n'$\nexists$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0,$ on en déduit $\sum u_n$ diverge.

Conclusion1: la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 0.$ elle ne sera donc pas absolument convergente pour $\alpha \leq 0.$

2) Convergence absolue:

1er cas: $\alpha > 1$, on a que $\left|\dfrac{\sin n}{n^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{n^\alpha},$ comme $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge (Riemann $\alpha > 1$) alors d'après le critére de comparaison la série $\sum u_n$ converge.

2ème cas: $0 < \alpha \leq 1$, on a que $\left|\dfrac{\sin n}{n^\alpha}\right| \geq \dfrac{\sin^2 n}{n^\alpha}$ car $|\sin n| \in [0,1]$,
de plus $\sin^2 n = \dfrac{1-\cos 2n}{2}$, ie $\geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{\cos 2n}{n^\alpha}\right)$, or $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge (Riemann $\alpha \leq 1$)
et $\sum \dfrac{\cos 2n}{n^\alpha} dt$ converge (il suffit d'utiliser Abel 1 comme au début de l'exemple).
Donc $\sum \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{\cos 2n}{n^\alpha}\right)$ diverge par linéarité $\overset{\text{comp}}{\Rightarrow} \sum\left|\dfrac{\sin n}{n^\alpha}\right|$diverge.

Conclusion2: la série $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1.$

3) Semi-convergence:

La série numérique donnée est semi-convergente lorsque $\alpha \in]0,1].$

Cet exemple nous permet d'énoncer aisément le résultat suivant:

Proposition:(Référence4)

1) Soient les séries numériques suivantes: $\sum \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ $\sum \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$, $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

✠ Elles sont convergentes ssi $\alpha > 0$.

✠ Elles sont absolument convergentes ssi $\alpha > 1$.

✠ Elles sont semi-convergentes ssi $\alpha \in]0,1]$.

2) $|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$, $|\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$.

Remarque:

1) Dans la s.n $\sum \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$, si $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou même $x = 2k\pi$) on obtient la série nulle.

2) Dans la s.n $\sum \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$, si $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ on obtient la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

III.4 REGLE DE LEIBNITZ.

Définition2: *On appelle série altérnée une série numérique qui s'écrit sous la forme* $\sum (-1)^n v_n$ *où* $(v_n)_n$ *est une suite numérique de signe constant.*

Définition3: Soit $\sum\limits_{n \geq n_0} (-1)^n v_n$ *une série numérique altérnée.*

Elle sera dite série de Leibnitz si:

1) $v_n \geq 0, \forall n \geq n_0$.

2) $(v_n)_n$ *est décroissante.*

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Théorème4: Toute série de Leibnitz $\sum (-1)^n v_n$ est convergente.

Preuve:

Appliquons la régle d'Abel1, en premier lieu $(v_n)_n$ vérifie la premiére condition, en second lieu posons $w_n = (-1)^n$,

$|S_n| = |w_0 + w_1 + \ldots + w_n| = |1 - 1 + 1 + \ldots + (-1)^n| \leq 1$

($|S_n|$ vaut 1 ou 0), donc on a bien $\exists M = 1$ tq $|S_n| \leq M$.

On en conclut que $\sum (-1)^n v_n$ est convergente.

Exemple: Etudier la nature des séries $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sqrt{n} + 1}{n}$.

Réponse:

1) La série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série altérnée en posant $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$.

Elle est de Leibnitz, en effet :

♣ $v_n > 0$

♣ $(v_n)_n$ est décroissante (poser $f(t) = \sqrt{t}$, $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0$)

♣ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Alors elle est convergente.

2) $u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ or $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge par linéarité.

Remarque1: Dans l'exemple précédent il est intéressant de constater que $u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et elles ne sont pas de même nature, ceci explique l'importance de travailler avec des séries dont le terme général est de signe constant pour utiliser les critéres de comparaisons (l'équivalence, régle de l'ordre...)

Théorème5: Soit $\sum u_n$ une série de Leibnitz. Alors

$$|S - S_n| = |R_n| = \left|\sum_{k\geq n+1} u_k\right| \leq |u_{n+1}|.$$

Où $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et R_n est le n ième reste de la série $\sum u_n$.

Remarque2: Le théorème4 fournit la régle de Leibnitz, le résultat qui est donné sous la forme du théoréme5 est une conséquence de la régle de Leibnitz mais qui n'est pas utile à ce niveau là, il nous sérvira plus loin!

III.5 REGLES DE CAUCHY ET DE D ALEMBERT GENERALISEES.

Proposition1: (Régle de Cauchy généralisée).
Soit $\sum u_n$ une série numérique telle que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$ existe $(0 \leq l \leq +\infty)$, alors ona :.

1) Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge (car elle est absolument convergente).
2) Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge (CN : son terme général ne tend pas vers 0).
3) Si $l = 1$ on ne peut rien dire, c'est le cas douteux.

Proposition2: (Régle de D'Alembert généralisée).
Soit $\sum u_n$ une série numérique telle que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$ existe $(0 \leq l \leq +\infty)$, alors ona :.

1) Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge (car elle est absolument convergente).
2) Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge (CN : son terme général ne tend pas vers 0).
3) Si $l = 1$ on ne peut rien dire, c'est le cas douteux.

III.6 TECHNIQUE DU DL.

Exemple: Etudier la nature (convergence absolue et semi-convergence) des séries de termes généraux:

$$(-1)^n\sqrt{n}\,\sin\left(\frac{1}{n}\right);\ \frac{(-1)^n}{\ln n}e^{-\frac{\ln n}{n}}.$$

Réponse:

a) Soit $u_n = (-1)^n\sqrt{n}\,\sin\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$, ie:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

1) Convergence:

$\rightsquigarrow$ $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série de Leibnitz donc convergente.

$\rightsquigarrow$ $\sum\limits_{n\geq 1} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ est absolument convergente d'après la régle de l'ordre,

En effet on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}}\left|o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} o(1) = 0,\ \alpha = \frac{3}{2} > 1.$

Donc par linéarité $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.

2) Convergence absolue:

$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ or $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann) donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge absolument par le critère d'équivalence.

Conclusion: $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est semi-convergente.

b) Soit $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}e^{-\frac{\ln n}{n}} = \frac{(-1)^n}{\ln n}\left(1-\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln^2 n}{2n^2}+o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right)$

$$\text{ie } v_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n\ln n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

1) Convergence:

$\rightsquigarrow$ $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ sont des séries de Leibnitz (en exo) donc convergentes.

$\rightsquigarrow$ Soit $w_n = \frac{(-1)^n\ln n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$, on a $|w_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{2n^2}$ or $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n^2}$ converge (Bertrand) d'où $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ converge absolument par le critére d'équivalence donc elle est convergente.

Par linéarité $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge.

2) Convergence absolue:

$|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right| = \frac{1}{\ln n}$ or $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{\ln n}$ diverge (Bertrand) donc $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ diverge absolument par le critère d'équivalence.

Conclusion: $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ est semi-convergente.

IV.COMMUTATIVITE ET ASSOCIATIVITE DES SERIES NUMERIQUES.

Ce paragraphe nous permet d'éviter de faire certains abus comme par exemple d'appliquer la commutativité à des séries sans conditions.
Les quelques preuves qui sont donnés sont pour les plus curieux...

Théorème1: Si une série $\sum u_n$ est absolument convergente alors toute série $\sum u_{\zeta(n)}$ (où ζ est une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$) est également convergente et converge vers la même somme, ie que la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre de ses termes.

Preuve:
En fait il suffit de montrer que la somme d'une série (donc convergente) à termes positifs ne dépend pas de l'ordre de ses termes.
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n \,/\, u_n \geq 0\ \forall n \geq 0$, soient S sa somme et $(S_n)_n$ la suite de ses sommes partielles.
Effectuons un changement de l'ordre des termes de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, on renumérote la série obtenue que l'on notera $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$, soit $(T_n)_n$ la suite de ses sommes partielles.
Montrons que $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = S$:
$\rightsquigarrow$ Il existe $m \in \mathbb{N}$ telle que tous les termes de T_n soient parmis les termes de S_m.
On obtient alors

$$T_n \leq S_m \leq S$$

ie $(T_n)_n$ est majorée donc convergente vers une limite T, de plus par passage à la limite on aura

$$T = \lim_{n\to+\infty} T_n \leq \lim_{n\to+\infty} S_m = S$$

On a donc montré en premier lieu que $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge vers T et que $T \leq S$.
$\rightsquigarrow$ De même, il existe $m' \in \mathbb{N}$ telle que tous les termes de S_n soient parmis ceux de $T_{m'}$.
On obtient alors

$$S_n \leq T_{m'} \leq T$$

Par passage à la limite on aura

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n \leq \lim_{n\to+\infty} T_{m'} = T$$

On a donc montré en second lieu que $S \leq T$. Alors $S = T$.
Finalement $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge vers S.

Remarque: Le théorème1 nous a permit d'établir la commutativité des séries absolument convergentes.

Définition1: *On dit qu'une série* $\sum u_n$ *est commutativement convergente si* $\sum u_{\zeta(n)}$ *est convergente* $\forall \zeta$ *une bijection de* $\mathbb{N}$ *vers* $\mathbb{N}$.

Exemple: Toute série absolument convergente est commutativement convergente.

Définition2: *On dit qu'une série* $\sum v_n$ *est obtenue par* *<u>regroupement des termes</u> d'une série* $\sum u_n$ *si on peut écrire:*

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \underbrace{u_0 + u_1 + \ldots + u_{m_0}} + \underbrace{u_{m_0+1} + \ldots + u_{m_1}} + \underbrace{u_{m_1+1} + \ldots + u_{m_2}} + \ldots$$

$$\sum_{n\geq 0} v_n = \qquad v_0 \qquad + \qquad v_1 \qquad + \qquad v_2 \qquad + \ldots$$

ie que $v_0 = \sum_{k=0}^{k=m_0} u_k$ *et que* $v_n = \sum_{k=m_{n-1}+1}^{k=m_n} u_k \ \forall n \geq 1.$

Exemple:

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n = \underbrace{1-1} + \underbrace{1-1} + \underbrace{1-1} + \ldots + \underbrace{1-1} + \ldots$$

$$\sum_{n\geq 0} v_n = \ v_0 \ + \ v_1 \ + \ v_2 \ + \ldots + \ v_n \ + \ldots$$

ie $v_n = 0 \ \forall n \geq 0$ et donc la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente (série nulle) alors que $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ diverge (CN).

Théorème2: Soit une série $\sum v_n$ obtenue par regroupement des termes d'une série $\sum u_n$.

1) Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et on a : $\sum_{n\geq 0} v_n = \sum_{n\geq 0} u_n$.

2) Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs alors :

$\left[\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge}\right]$ de plus : $\sum_{n\geq 0} v_n = \sum_{n\geq 0} u_n$

Théorème3: Si une série $\sum u_n$ est semi-convergente alors il existe ζ une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\zeta(n)}$ soit convergente vers une somme différente ou bien elle peut même être divergente, ie que la somme d'une série semi-convergente dépend de l'ordre de ses termes.

<u>Preuve:</u>

En fait il suffit de donner un contre exemple pour montrer que que la somme d'une série semi-convergente dépend de l'ordre de ses termes.

Soit la série semi-convergente : $\sum_{n\geq 1} u_n \,/\, u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, soient $S(u)$ sa somme et $(S_n(u))_n$ la suite de ses sommes partielles.

$$\sum_{n\geq 1} u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

Nous verrons plus loin que $S(u) = \log 2$.
Considéronsla série $\sum_{n\geq 1} v_n$ obtenue à partir des termes de $\sum_{n\geq 1} u_n$ en effectuant la permutation suivante:

$$\sum_{n\geq 1} v_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots$$

Nous avons trois possibilités :
1) $\sum_{n\geq 1} v_n$ est divergente et dans ce cas nous avons notre contradiction.
2) $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente vers une somme différente de $S(u)$ et dans ce cas aussi nous avons notre contradiction.
3) $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente vers la somme $S(u)$, dans ce cas faisons un regroupement des termes de $\sum_{n\geq 1} v_n$ comme suit:

$$\sum_{n\geq 1} w_n = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \ldots$$

D'après le théorème2 $\sum_{n\geq 1} w_n$ est convergente, soit $(T_{3n}(w))_n$ la suite de ses sommes partielles:

$$\begin{aligned}
T_{3n}(w) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2.2k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right] \\
&= \frac{1}{2} S_{2n}(u)
\end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient que $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge vers $T = \frac{1}{2}S$, ceci fournit la contradiction pour le 3ème cas.

Définition3: Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques réelles, on appelle produit de Cauchy des deux séries la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ telle que $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Théorème3: Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques absolument convergentes alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} w_n$ est une série absolument convergente, de plus: $\sum_{n\geq 0} w_n = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right).\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right).$