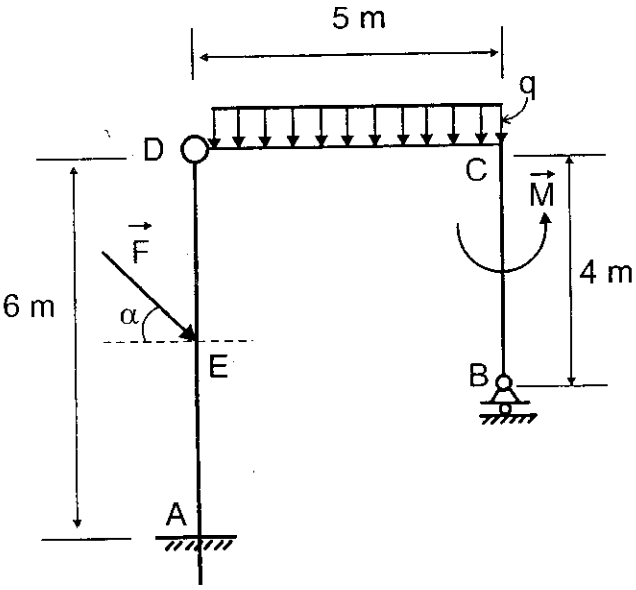
جامعة منتوري قسنطينة
دائرة العلوم الدقيقة و التكنولوجيا

السنة الدراسية 2009-2010
المدة: ساعة و نصف

# الامتحان في مقياس Physique 4

**التمرين 1: (8 نقاط)**




ليكن لدينا النظام الميكانيكي المبين في الشكل و المكون من عارضتين $AD$ و $DCB$ مهملة الوزن.
أوجد ردود أفعال المسندين $A$ و $B$ علما أن:

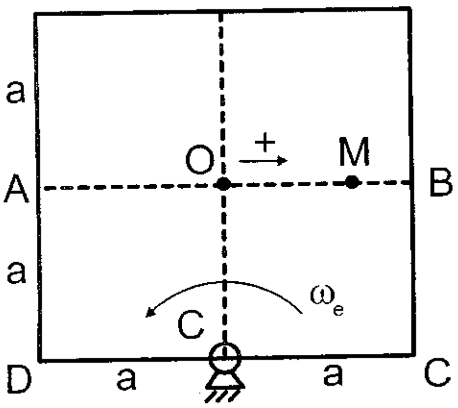
$$q = 20\,kN/m,\ AD = 6\,m,\ DC = 5\,m,\ CB = 4\,m$$

$$F = 2kN,\ M = 5\,kN.m\ ,\ \alpha = 45°$$

النقطة $E$ هي منتصف $AD$.

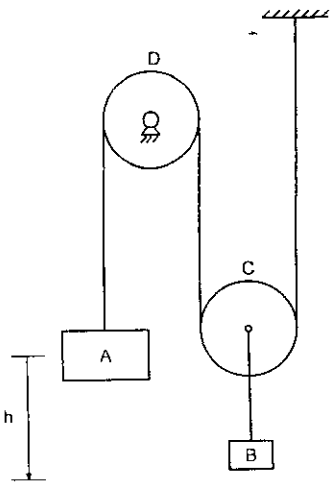
**ملاحظة:** النقطة $D$ عبارة عن مفصلة، $A$ مسند موثوق و $B$ مسند بسيط.

**التمرين 2: (6 نقاط)**




مربع $ABCD$ طول ضلعه يساوي $2a\ (cm)$، يدور حول النقطة $C$ منتصف الضلع $CD$ بسرعة زاوية ثابتة $\omega_e = \frac{\pi}{2}\ rad/s$. تقوم النقطة $M$ بحركة اهتزازية توافقية على امتداد الضلع $AB$ وفق القانون $OM = a\cos(\frac{\pi}{2}t)\ \ (cm)$.
احسب السرعة المطلقة و التسارع المطلق للنقطة $M$ عند اللحظة $t = 1s$، مع العلم أن $a = 2\,cm$.

**التمرين 3: (6 نقاط)**




ثقل $A$ وزنه $P_1$ يهبط إلى الأسفل بواسطة سلك يمر على البكرة الثابتة $D$، و في أثناء هبوطه يرفع إلى أعلى ثقلا $B$ وزنه $P_2$ مثبتا في محور بكرة متحركة $C$. نعتبر البكرتان $D$ و $C$ عبارة عن قرصين متجانسين متشابهين وزن كل منهما $P_3$ و نصف قطرهما $R$.
**بتطبيق نظرية الطاقة الحركية،** احسب سرعة الثقل $A$ عندما يهبط بمسافة $h$. نهمل كتلة السلك و الانزلاق على إطاري البكرتين و قوى المقاومة.
تنطلق الجملة في اللحظة الزمنية من حالة السكون.
**تنبيه:** عزم عطالة قرص متجانس كتلته $m$ و نصف قطره $R$ بالنسبة لمحور عمودي يمر بمركزه يساوي $J = \frac{1}{2}mR^2$

بالتوفيق

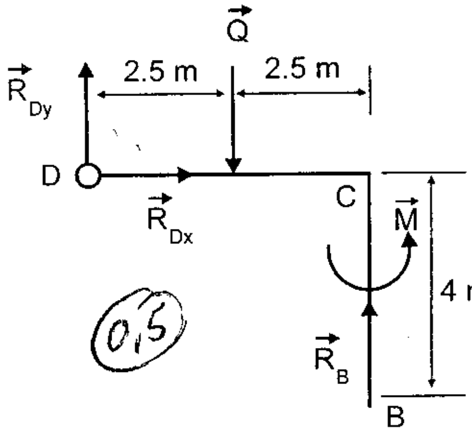
جامعة منتوري قسنطينة
دائرة العلوم الدقيقة و التكنولوجيا

السنة الدراسية 2009-2010

## الحل النموذجي الامتحان في مقياس Physique 4

**حل التمرين 1:** 8 Points

نقوم بتجزئة النظام إلى جزأين و ذلك عند المفصلة $D$.




(0,5)

**الجزء الأول:**

لدينا:

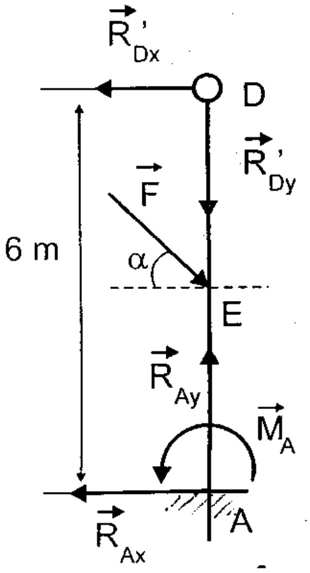
$$Q = qDC = 20\times 5 = 100\,kN \qquad (1)$$ (0,5)

الشروط التحليلية للتوازن:

$$\sum_k F_{kx} = 0 \Rightarrow R_{Dx} = 0 \qquad (2)$$ (0,5)

$$\sum_k F_{ky} = 0 \Rightarrow R_B + R_{Dy} - Q = 0 \qquad (3)$$ (0,5)

$$\sum_k \mathfrak{M}_B(\vec{F}_k) = 0 \Rightarrow -4R_{Dx} - 5R_{Dy} + 2.5Q + M = 0 \qquad (4)$$ (1,25)




(0,75)

**الجزء الثاني:**

الشروط التحليلية للتوازن:

$$\sum_k F_{kx} = 0 \Rightarrow -R_{Ax} - R'_{Dx} + F\sin\alpha = 0 \qquad (5)$$ (0,5)

$$\sum_k F_{ky} = 0 \Rightarrow R_{Ay} - R'_{Dy} - F\sin\alpha = 0 \qquad (6)$$ (0,5)

$$\sum_k M_A(\vec{F}_k) = 0 \Rightarrow 6R'_{Dx} - 3F\cos\alpha + M_A = 0 \qquad (7)$$ (1,25)

بالإضافة إلى العلاقتين:

$$R'_{Dx} = R_{Dx} \qquad (8)$$

$$R'_{Dy} = R_{Dy} \qquad (9)$$ (0,25)

من العلاقات (2)، (4) و (9) نستنتج أن:

$$R_{Dy} = R'_{Dy} = \frac{2.5Q + M}{5} = 51\,kN \qquad (10)$$ (0,25)

بالتعويض في العلاقة (3) نجد رد الفعل عند النقطة $B$ يساوي:

$$R_B = \frac{2.5Q - M}{5} = 49\ kN \qquad (11)$$ (0,25)

من العلاقات (5)، (2) و (8) نستنتج أن:

$$R_{Ax} = F\sin\alpha = 1.41\,kN \qquad (12)$$ (0,25)

من العلاقتين (6) و (10) نستنتج أن:

$$R_{Ay} = \frac{2.5Q + M}{5} + F\sin\alpha = 52.41\ kN \qquad (13)$$ (0,25)

من العلاقات (7)، (2) و (8) نستنتج أن:

$$M_A = 3F\cos\alpha = 4.24\ kN \qquad (14)$$ (0,25)

من العلاقتين (12) و (13) نستنتج أن رد الفعل عند النقطة $A$ يساوي:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 52.43\ kN \qquad (15)$$ (0,25)

حل التمرين 2: 06 Points

في اللحظة $t=1s$ تكون النقطة $M$ في الوضعية $OM = a\cos(\frac{\pi}{2}\times 1)=0$ . و منه تكون النقطة $M$ موجودة عند المبدأ $O$ . (0,25)

تعطى السرعة النسبية للنقطة $M$ بالعبارة:

$$V_r = \frac{d}{dt}(OM) = \frac{d}{dt}\left[a\cos(\frac{\pi}{2}t)\right] = -a\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}t) \quad (0,25)$$

و منه قيمة هذه السرعة في اللحظة $t=1s$ تساوي:

$$V_r = -a\frac{\pi}{2} = -\pi = -3.14\ cm/s \quad (0,25)$$

و تكون محمولة على الضلع $AB$ و متجهة نحو النقطة $A$ .

السرعة المكتسبة تساوي:

$$V_e = \omega_e OC \quad (0,25)$$

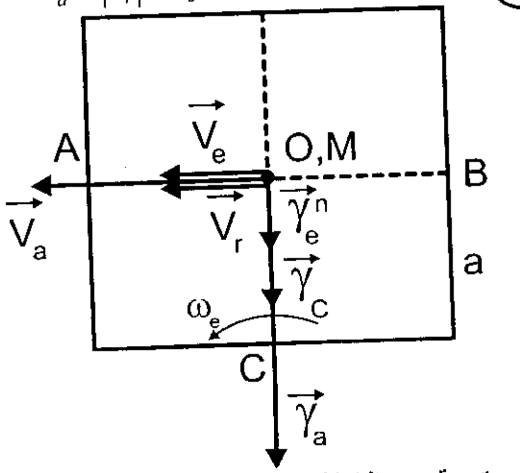
$$V_e = a\frac{\pi}{2} = \pi = 3.14\ cm/s \quad (0,25)$$

و تكون محمولة كذلك على الضلع $AB$ و متجهة نحو النقطة $A$ .

السرعتان النسبية و المكتسبة لهما نفس الحامل و نفس الاتجاه و منه قيمة السرعة المطلقة في اللحظة $t=1s$ تساوي:

$$V_a = |V_r| + V_e = 2\pi = 6.28\,cm/s \quad (0,25) + (0,25)$$

(0,75)




و تكون محمولة على الضلع $AB$ و متجهة نحو النقطة $A$ .

الحركة المطلقة هي تركيب لحركتين: حركة نسبية انسحابية و حركة مكتسبة دورانية.

التسارع النسبي يساوي:

$$\gamma_r = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-a\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}t)\right] = -a\frac{\pi^2}{4}\cos(\frac{\pi}{2}t) \quad (0,75)$$

و منه قيمة التسارع النسبي في اللحظة $t=1s$ تساوي:

$$\gamma_r = 0 \quad (0,25)$$

الحركة المكتسبة دورانية و منه هناك مركبتين لتسارع الجر،

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}'_e + \vec{\gamma}''_e$$

يعطى التسارع الزاوي المكتسب بالعبارة:

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 0 \quad (0,25)$$

كون السرعة الزاوية المكتسبة ثابتة ، و منه التسارع المكتسب المماسي معدوم:

$$\gamma'_e = \varepsilon_e OC = 0 \quad (0,25) + (0,25)$$

أما التسارع المكتسب الناظمي فيساوي:

$$\gamma_e^n = \omega_e^2 OC = (\frac{\pi}{2})^2 a = \frac{\pi^2}{2} = 4.93\ cm/s^2$$ (0,25) + (0,25)

و تكون هذه المركبة متجهة من $M$ إلى $C$.

أما تسارع Coriolis فيعطى بـ:

$$\vec{\gamma}_C = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r$$

الزاوية بين $\vec{\omega}_e$ و $\vec{V}_r$ تساوي $90^0$ و منه:

$$\gamma_C = 2\omega_e V_r = 2\times\frac{\pi}{2}\times a\frac{\pi}{2} = a\frac{\pi^2}{2} = \pi^2 = 9.87\ cm/s^2$$ (0,25) + (0,25)

و تكون هذه المركبة متجهة من $M$ إلى $C$.

يعطى التسارع المطلق بالعبارة:

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e^t + \vec{\gamma}_e^n + \vec{\gamma}_C = \vec{\gamma}_e^n + \vec{\gamma}_C$$ (0,25)

و منه:

$$\gamma_a = \gamma_e^n + \gamma_C = \frac{3\pi^2}{2} = 14.80\ cm/s^2$$ (0,5)

و يكون التسارع المطلق متجها من $M$ إلى $C$.

**حل التمرين 3:** 06 Points

نطبق نظرية تغير الطاقة الحركية:

$$T - T_0 = \sum_k A_k^e + \sum_k A_k^i \quad (1)$$ (0,25)

النظام غير قابل للتشوه ومنه مجموع أعمال القوى الداخلية معدوم $\sum_k A_k^i = 0$. الجملة تنطلق من حالة السكون $T_0 = 0$ و منه تصبح العلاقة السابقة من الشكل:

$$T = \sum_k A_k^e \quad (2)$$

النظام مكون من أربعة أجسام، و منه الطاقة الحركية للنظام تساوي:

$$T = T_A + T_B + T_C + T_D \quad (3)$$

يقوم الجسم $A$ بحركة انسحابية و منه الطاقة الحركية لهذا الجسم تساوي:

$$T_A = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}V_A^2 \quad (4)$$ (0,25)

تقوم البكرة $D$ بحركة دورانية و منه الطاقة الحركية لهذه البكرة تساوي:

$$T_D = \frac{1}{2}J_D\omega_D^2 = \frac{1}{4}\frac{P_3}{g}R^2\omega_D^2 \quad (5)$$ (0,25)

حيث $J_D = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}R^2$.

تقوم البكرة $C$ بحركة مستوية و منه الطاقة الحركية لهذه البكرة تساوي:

$$T_C = \frac{1}{2}m_C V_O^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_C^2 = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}V_O^2 + \frac{1}{4}\frac{P_3}{g}R^2\omega_C^2 \quad (6)$$ (0,25)

حيث $J_C = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}R^2$.

يقوم الجسم $B$ بحركة انسحابية و منه الطاقة الحركية لهذا الجسم تساوي:

$$T_B = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}V_B^2 \quad (7)$$ (0,25)

الأجزاء $AE$ ، $FI$ ، $JK$ و $OB$ من الخيوط تقوم بحركة انسحابية، و منه:

$$V_A = V_E \quad (8)$$

$$V_F = V_I \tag{9}$$

$$V_J = V_K = 0 \quad 0,25 \tag{10}$$

$$V_O = V_B \tag{11}$$

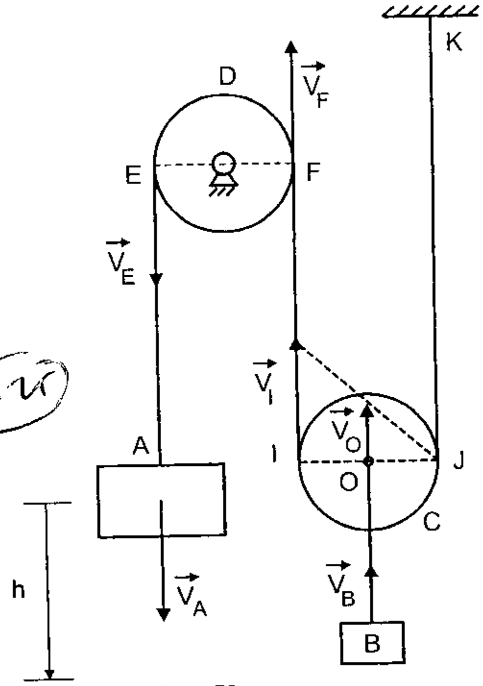
لاحظ أن النقطة $K$ و التي تنتمي إلى الجدار ساكنة.

من جهة أخرى نظرا أن مركز البكرة $D$ ساكن و منه يمكن اعتباره مركز لحظي للدوران، و منه:

$$\frac{V_E}{R} = \frac{V_F}{R} = \omega_D \quad 0,25 \tag{12}$$

من العلاقة (9) نستنتج أن النقطة $J$ هي المركز اللحظي للدوران للبكرة $C$ و منه العلاقات التالية:

0,25




$$\frac{V_I}{2R} = \frac{V_O}{R} = \omega_C \quad 0,25 \tag{13}$$

من العلاقات (8) إلى (13) نستنتج أن:

$$\omega_D = \frac{V_A}{R} \quad 0,25 \tag{14}$$

$$\omega_C = \frac{V_A}{2R} \quad 0,25 \tag{15}$$

$$V_O = \frac{V_A}{2} \tag{16}$$

$$V_B = \frac{V_A}{2} \tag{17}$$

0,25

من العلاقات(4)، (5)، (6) ، (7)، (14)، (15)، (16) و (17) تصبح الطاقات الحركية للأجسام الأربعة تساوي:

$$T_A = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}V_A^2 \quad 0,25 \tag{18}$$

$$T_D = \frac{1}{4}\frac{P_3}{g}V_A^2 \quad 0,25 \tag{19}$$

$$T_C = \frac{3}{16}\frac{P_3}{g}V_A^2 \quad 0,5 \tag{20}$$

$$T_B = \frac{1}{8}\frac{P_2}{g}V_A^2 \quad 0,25 \tag{21}$$

و منه الطاقة الحركية للنظام تساوي:

$$T = \frac{V_A^2}{2g}(P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{7}{8}P_3) \qquad 0,25 \qquad (22)$$

نقوم الآن بحساب مجموع أعمال القوى الخارجية $\sum_k A_k^e$. القوى الوحيدة التي تعمل هي أثقال الأجسام $A$ ، $B$ و $C$.

$$\sum_k dA_k^e = dA(\overrightarrow{P_1}) + dA(\overrightarrow{P_2}) + dA(\overrightarrow{P_3}) \qquad (23)$$

حيث:

$$\begin{aligned} dA(\overrightarrow{P_1}) &= P_1 dh & 0,25 \\ dA(\overrightarrow{P_2}) &= -P_2 dh_B & 0,25 \\ dA(\overrightarrow{P_3}) &= -P_3 dh_O & 0,25 \end{aligned} \qquad (24)$$

حيث $dh$ مقدار انتقال الجسم $A$ ، $dh_B$ مقدار انتقال الجسم $B$ و $dh_O$ مقدار انتقال المركز $O$ للبكرة $C$. ومنه:

$$\sum_k dA_k^e = P_1 dh - P_2 dh_B - P_3 dh_O \qquad (25)$$

الانتقالات $dh$ ، $dh_B$ و $dh_O$ مرتبطة ببعضها البعض وفق العلاقات (16) و (17):

$$V_B = V_O = \frac{V_A}{2} \Rightarrow \frac{dh_B}{dt} = \frac{dh_O}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dh}{dt} \Rightarrow dh_B = dh_O = \frac{dh}{2} \qquad (26)$$

و منه عبارة العمل الجزئي تصبح:

$$\sum_k dA_k^e = (P_1 - \frac{P_2}{2} - \frac{P_3}{2})dh \qquad (27)$$

بالتكامل نجد:

$$\sum_k A_k^e = (P_1 - \frac{P_2}{2} - \frac{P_3}{2})h \qquad 0,25 \qquad (28)$$

و منه من العلاقات (2)، (22) و (28) لدينا:

$$\frac{V_A^2}{2g}(P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{7}{8}P_3) = (P_1 - \frac{P_2}{2} - \frac{P_3}{2})h \qquad (29)$$

و منه سرعة الثقل $A$ عندما يهبط بمسافة $h$ تساوي:

$$V_A = 2\sqrt{2gh\frac{2P_1 - P_2 - P_3}{8P_1 + 2P_2 + 7P_3}} \qquad 0,5 \qquad (30)$$