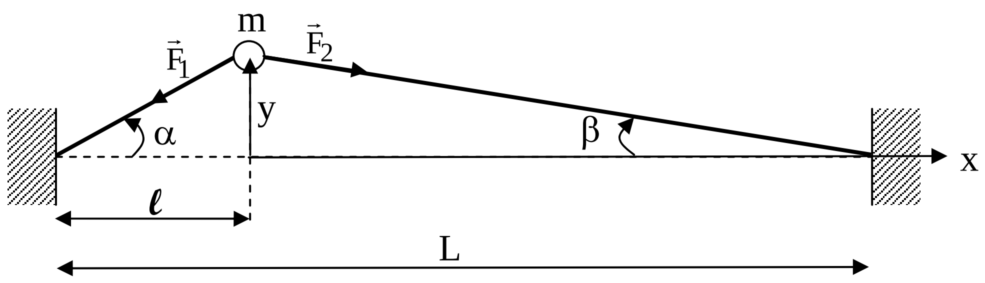
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne
Faculté de Physique LMD- Filère SM – L2 – S3 : Module **Vibrations et Ondes**

Premier semestre 2006-2007	Interrogation écrite+Corrigé	Durée : 45 mn

Une masse ponctuelle m glisse sans frottement sur une table horizontale. Elle est fixée à deux bâtis fixes par deux cordes de masse négligeable, tendues horizontalement. On suppose que la tension F des cordes reste constante lors du mouvement.



1°) Calculer l'énergie cinétique T du système.

Réponse : $\boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2}$

2°) Représenter sur la figure la tension exercée par chaque corde sur la masse m.
Dans le cas des oscillations de faible amplitude $\sin(\alpha) \approx \mathrm{tg}(\alpha)$ et $\sin(\beta) \approx \mathrm{tg}(\beta)$.

Montrer que dans ce cas, l'énergie potentielle U se met sous la forme : $U = \frac{1}{2} k F y^2$.

Donner l'expression de k en fonction de ℓ et L.

Réponse :

$$\vec{F}_1 = (-F\cos(\alpha), -F\sin(\alpha));\ \vec{F}_2 = (F\cos(\beta), -F\sin(\beta));\ \vec{r} = (x, y);\ d\vec{r} = (dx, dy)$$

$$dU = -\vec{F}_1.d\vec{r} - \vec{F}_2.d\vec{r} = F[\sin(\alpha) + \sin(\beta)]dy \approx F[\mathrm{tg}(\alpha) + \mathrm{tg}(\beta)]dy = F\left[\frac{y}{\ell} + \frac{y}{L-\ell}\right]dy$$

$$U = \int_0^y F\left[\frac{y}{\ell} + \frac{y}{L-\ell}\right]dy = \frac{1}{2} k F y^2 \quad \text{avec} \quad k = \frac{L}{\ell(L-\ell)}$$

4°) Etablir l'équation différentielle du mouvement pour y.

Réponse : $\boxed{\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{FL}{m\ell(L-\ell)}}}$

5°) Calculer la période propre T_0 des oscillations libres en fonction de F, m, ℓ et L.

Réponse : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell(L-\ell)}{FL}}}$

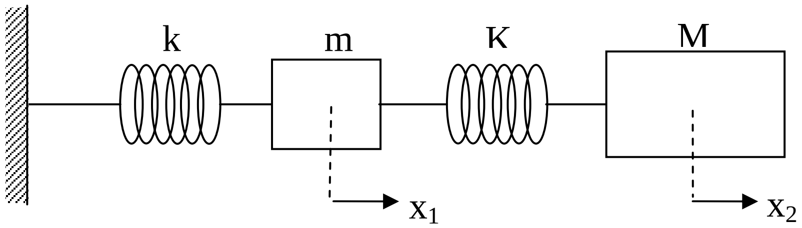
6°) Pour L=1m, ℓ=L/3 et m=200g, la période T_0 des oscillations est égale à 0.1 s. En déduire la tension F du fil.

Réponse : $\boxed{F = \frac{4\pi^2 m\ell(L-\ell)}{T_0^2 L} = 175\ \text{N}}$

Matricule :	Nom :	Prénom :	Groupe :

Faculté de Physique	LMD- Filière SM – L2 – S3 : Module **Vibrations et Ondes**	
Premier semestre 2006-2007	Interrogation écrite n°2	Durée : 45 mn

Exercice 1 :



On se propose d'étudier les oscillations libres du système à deux degrés de liberté ci-dessus dans lequel : K=k et M=m/2.

1°) Calculer l'énergie cinétique T du système

Réponse : $\boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_2^2}$

2°) Calculer l'énergie potentielle du système

Réponse : $\boxed{U = \frac{1}{2}(k+K)x_1^2 + \frac{1}{2} K x_2^2 - K x_1 x_2}$

3°) Ecrire les équations de Lagrange pour ce système

Réponse : $\boxed{\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right] - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right] - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}}$

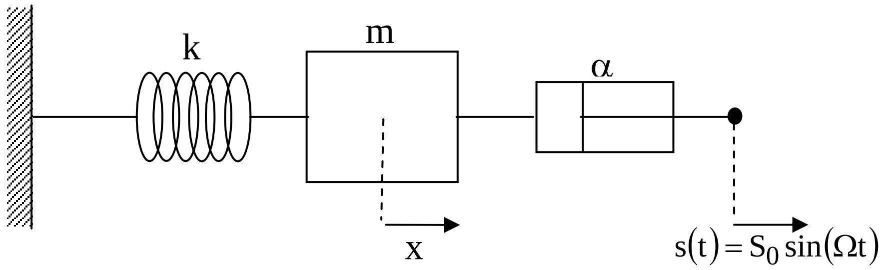
5°) Etablir les équations différentielles du mouvement

Réponse : $\boxed{\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k+K)x_1 - Kx_2 = 0 \\ -Kx_2 + M\ddot{x}_2 + Kx_2 = 0 \end{cases}}$

6°) Calculer les pulsations propres du système en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Réponse : $\boxed{\begin{array}{l} \omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\ \omega_0 \\ \omega_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\ \omega_0 \end{array}}$

Exercice 2



Le système ci-dessus est constitué d'une masse m reliée à un bâti fixe par un ressort de raideur k. Un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α est relié à la masse m. Le déplacement de l'autre extrémité du ressort est $s(t)=S_0 \sin(\Omega t)$.

1°) Calculer l'énergie cinétique T du système

Réponse : $\boxed{T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2}$

2°) Calculer l'énergie potentielle du système

Réponse : $\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}$

3°) Calculer la fonction dissipation D

Réponse : $\boxed{D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x} - \dot{s})^2}$

4°) Ecrire l'équation de Lagrange pour ce système

Réponse : $\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0}$

5°) Etablir l'équation différentielle du mouvement

Réponse : $$\boxed{\begin{array}{l}\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 2\delta\dot{s} \\ \text{avec} \quad \delta = \frac{\alpha}{2m} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\end{array}}$$

6°) Calculer l'amplitude des oscillations en régime permanent sinusoïdal

Réponse : $\boxed{X_0 = \frac{2\delta\Omega S_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}}$

7°) Calculer la pulsation de résonance :

Réponse : $\boxed{\Omega_R = \omega_0}$

8°) En déduire l'amplitude des oscillations de la masse à la résonance

Réponse : $\boxed{X_{0\,max} = S_0}$

Matricule :	Nom :	Prénom :	Groupe :

Faculté de Physique LMD- Filère SM – L2 – S3 : Module **Vibrations et Ondes**	
Premier semestre 2006-2007 Interrogation écrite n°3	Durée : 45 mn

Exercice 1 :

Etant donnée l'onde $u(x,t) = 2.10^{-3}\ \sin[2\pi(0.1x - 5t)]\,(m)$, où x est en mètres et t en secondes, déterminer

- La longueur d'onde :

Réponse : $\boxed{\lambda=10m}$

- La fréquence :

Réponse : $\boxed{f=5Hz}$

- La période :

Réponse : $\boxed{P=0.2s}$

- La vitesse de propagation :

Réponse : $\boxed{V=50\ m/s}$

- L'amplitude :

Réponse : $\boxed{x_0=2.10^{-3}\ m}$

- Le sens de propagation :

Réponse : $\boxed{\text{Sens des x croissants}}$

- Donner l'équation d'une onde identique mais se propageant dans le sens inverse :

Réponse : $\boxed{u(x,t) = 2.10^{-3}\sin[2\pi(0.1x + 5t)]}$

Exercice 2 :

Une source de vibration à une extrémité d'une corde sous tension a un déplacement donné par l'équation $u(t) = 0.1\sin(6t)$, où u est en mètres et t en secondes. La tension de la corde est de 4 N et sa mase par unité de longueur est 0.010 kg m^{-1}.

- Quelle est la vitesse de propagation de l'onde dans la corde ?

Réponse : $\boxed{V=20m/s}$

- Quelle est la fréquence de l'onde ?

Réponse : $\boxed{f=0.95\ Hz}$

- Quelle est sa longueur d'onde ?

Réponse : $\boxed{\lambda=20.9m}$

- Quelle est l'équation du déplacement d'un point situé à 1 mètre de la source ?

Réponse : $\boxed{u(1,t) = 0.1\sin\left[6\left(t - \frac{1}{20}\right)\right]}$

- Quelle est la vitesse de particule d'un point situé à 3 mètres de la source ?

Réponse : $\boxed{\dot{u}(3,t) = 0.6\cos\left[6\left(t - \frac{3}{20}\right)\right]}$

Exercice 3 :

Soit deux cordes de longueur semi-infinie reliées en x=0. La corde qui s'étend de $-\infty$ à 0 a une densité linéique μ_1. La seconde corde qui s'étend de 0 à $+\infty$ a une densité linéique $\mu_2=0.5\,\mu_1$. Lorsqu'une onde incidente sinusoïdale se propage de $-\infty$ dans le sens des x positifs, elle subit une réflexion partielle en x=0. L'amplitude de l'onde incidente est U_0 et sa pulsation est ω.

1°) Calculer le coefficient de réflexion en x=0.

Réponse : $\boxed{r=\dfrac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}=0.17}$

2°) Montrer que l'onde résultante dans la première corde s'écrit sous la forme : $u(x,t)=U(x)\cos(\omega t+\phi)$. Donner l'expression de l'amplitude U(x) et de la phase ϕ.

Réponse :

$$U(x)=\sqrt{1+r^2+2r\cos(2kx)}\;U_0 \quad , \quad \text{avec } k=\frac{\omega}{V}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\phi=-\operatorname{arctg}\left[\frac{1-r}{1+r}\operatorname{tg}(kx)\right]$$

3°) Donner l'expression de l'amplitude des maxima U_{max} en fonction de U_0 et calculer la position des maxima en fonction de la longueur d'onde λ.

Réponse :

$$U_{max}=(1+r)U_0$$

$$x=n\frac{\lambda}{2}$$

4°) Donner l'expression de l'amplitude des minima U_{min} en fonction de U_0 et calculer la position des minima en fonction de la longueur d'onde λ.

Réponse :

$$U_{max}=(1-r)U_0$$

$$x=(2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

Exercice 4 :

On considère deux ondes acoustiques de fréquence f=500 Hz et d'amplitudes respectives $p_1=2\times10^{-5}\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ et $p_2=28\,\mathrm{N\,m^{-2}}$. Déterminer dans chaque cas :

- l'intensité acoustique

Réponse :

$$I_1=4.54\times10^{-13}\,\mathrm{W/m^2}$$
$$I_2=0.89\,\mathrm{W/m^2}$$

- le niveau sonore en dB

Réponse :

$$N_1=-3.43\,\mathrm{dB}$$
$$N_2=119\,\mathrm{dB}$$

- l'amplitude du déplacement de particules

Réponse :

$$u_1=1.4\times10^{-11}\,\mathrm{m}$$
$$u_2=1.9\times10^{-5}\,\mathrm{m}$$

- la vitesse de particules

Réponse :

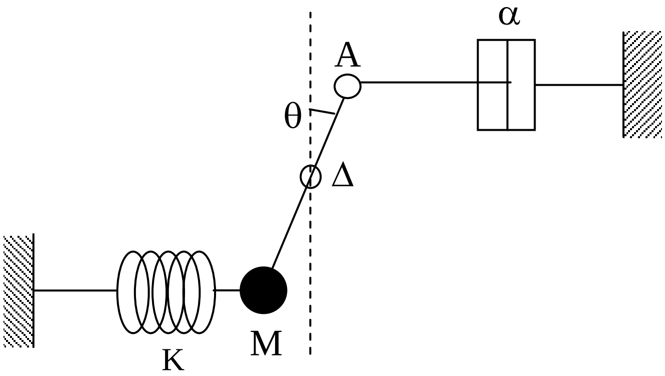
$$\dot{u}_1=3.1\times10^{-8}\,\mathrm{m/s}$$
$$\dot{u}_2=6.4\times10^{-2}\,\mathrm{m/s}$$

Matricule :	Nom :	Prénom :	Groupe :

Faculté de Physique LMD- Filère SM – L2 – S3 : Module **Vibrations et Ondes**
Premier semestre 2006-2007 Epreuve de synthèse Durée : 1h30mn

Exercice 1 : (/6 points)

On considère le système mécanique ci-contre constitué d'une tige de longueur L et de masse négligeable pouvant tourner dans un plan vertical autour de son axe fixe Δ. Le point A est relié à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. A l'autre extrémité de la tige est fixée une masse ponctuelle M qui est reliée à un second bâti fixe par un ressort de raideur K. On se place dans le cas des oscillations libres de faible amplitude.



1. Calculer
   - L'énergie cinétique T

Réponse : $\boxed{T=\frac{1}{2}\left[\frac{ML^2}{4}\right]\dot{\theta}^2}$

   - L'énergie potentielle U

Réponse : $\boxed{U=\frac{1}{2}\left[\frac{KL^2}{4}+\frac{MgL}{2}\right]\theta^2}$

   - La fonction dissipation

Réponse : $\boxed{D=\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha L^2}{4}\right]\dot{\theta}^2}$

2. Etablir l'équation différentielle du mouvement satisfaite par θ.

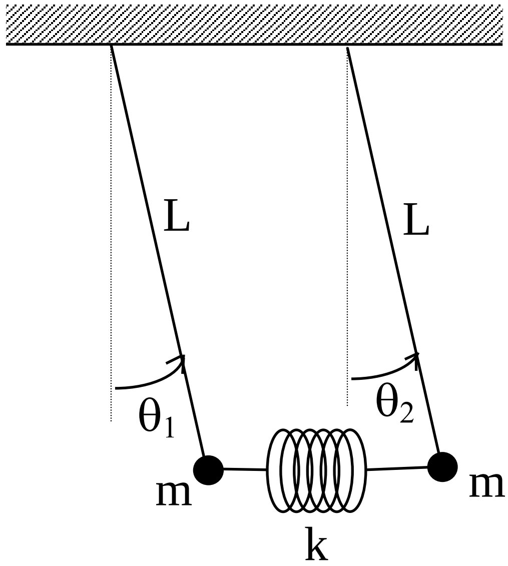
Réponse : $\boxed{\ddot{\theta}+2\delta\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0 \quad \text{avec} \quad \delta=\frac{\alpha}{2M} \quad \text{et} \quad \omega_0=\sqrt{\frac{K}{M}+\frac{2g}{L}}}$

3. Lorsque le système est abandonné sans vitesse initiale, il effectue des oscillations amorties de période T= 0.1 s, dont l'amplitude diminue de moitié au bout de 5 périodes. Calculer le coefficient d'amortissement α sachant que M=0.5 kg .

Réponse : $\boxed{\alpha=\frac{2M}{5T}\mathrm{Ln}(2)=1.39\,\mathrm{kg.s^{-1}}}$

NOM :	Prénom :

Exercice 2 : (/ 6 points)



On considère le système de la figure ci-dessus constitué de deux pendules simples identiques de masse m et de longueur L, fixés à un bâti fixe horizontal. Un ressort de raideur k assure le couplage entre les deux pendules. A l'équilibre les deux pendules sont verticaux.

1°) Calculer :

- L'énergie cinétique T :

Réponse : $\boxed{T = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}_2^2}$

- L'énergie potentielle U

Réponse : $\boxed{U = \frac{1}{2}\left(kL^2 + mgL\right)\theta_1^2 + \frac{1}{2}\left(kL^2 + mgL\right)\theta_2^2 - kL^2\theta_1\theta_2}$

- Le lagrangien $\mathcal{L}$ dans le cas des oscillations de faible amplitude.

Réponse : $\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}\left(kL^2 + mgL\right)\theta_1^2 - \frac{1}{2}\left(kL^2 + mgL\right)\theta_2^2 + kL^2\theta_1\theta_2}$

2°) Etablir les équations différentielles du mouvement.

Réponse : $$\boxed{\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta_1 - \frac{k}{m}\theta_2 = 0 \\ -\frac{k}{m}\theta_1 + \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta_2 = 0 \end{cases}}$$

3°) Calculer les pulsations propres ω_1 et ω_2 en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Réponse : $\boxed{\begin{array}{l} \omega_1 = \omega_0 \\ \omega_2 = \sqrt{3}\,\omega_0 \end{array}}$

4°) Calculer les rapports des amplitudes dans les modes.

Réponse : $\boxed{\begin{array}{l} \mu_1 = +1 \\ \mu_2 = -1 \end{array}}$

5°) Calculer θ_1 et θ_2, pour les conditions initiales suivantes :

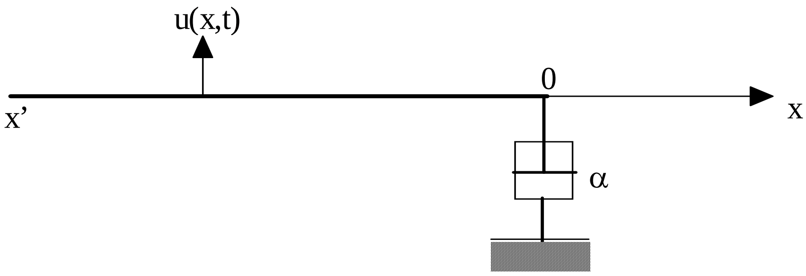
$$\theta_1(t=0) = -\theta_2(t=0) = \theta_0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_1(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) = 0$$

Réponse : $\boxed{\begin{array}{l} \theta_1(t) = \theta_0 \cos(\omega_2 t) \\ \theta_2(t) = -\theta_0 \cos(\omega_2 t) \end{array}}$

NOM :	Prénom :

Exercice 3 : (/ 5 points)

On considère une corde homogène, de longueur semi-infinie, de masse par unité de longueur μ et tendue avec une tension T. Cette corde est terminée en x=0 par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Un onde incidente transversale sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude U_0, se propage dans cette corde dans le sens des x croissants et se réfléchit en x=0.



1°) Calculer le coefficient de réflexion en x=0.

Réponse : $\boxed{r = \dfrac{\sqrt{\mu T} - \alpha}{\sqrt{\mu T} + \alpha}}$

2°) Montrer que l'onde résultante dans la corde s'écrit sous la forme : $u(x,t) = U(x)\cos[\omega t + \phi(x)]$. Donner l'expression de l'amplitude U(x) et de la phase ϕ(x).

Réponse :

$$U(x) = \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos(2kx)}\, U_0 \quad , \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\phi = -\mathrm{arctg}\left[\frac{1-r}{1+r}\mathrm{tg}(kx)\right]$$

3°) Donner l'expression de l'amplitude des maxima U_{max} en fonction de U_0 et calculer la position des maxima en fonction de la longueur d'onde λ.

Réponse :

$$\text{si } \sqrt{\mu T} > \alpha, r > 0 \ \text{ et } \ U_{max} = (1+r)U_0,\ x_{max} = n\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{si } \sqrt{\mu T} < \alpha, r < 0 \ \text{ et } \ U_{max} = (1-r)U_0,\ x_{max} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

4°) Donner l'expression de l'amplitude des minima U_{min} en fonction de U_0 et calculer la position des minima en fonction de la longueur d'onde λ.

Réponse :

$$\text{si } \sqrt{\mu T} > \alpha, r > 0 \ \text{ et } \ U_{min} = (1-r)U_0,\ x_{min} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$\text{si } \sqrt{\mu T} < \alpha, r < 0 \ \text{ et } \ U_{min} = (1+r)U_0,\ x_{min} = n\frac{\lambda}{2}$$

U.S.T.H.B. Faculté de Physique Module : PHYS. 1 Année 2006-2007

EMD I (1 h 30 mn)

PROBLEME / 13 pts :

On se propose d'étudier le comportement vibratoire de matériaux en caoutchouc (Fig.1a) en vue de leur utilisation dans la construction. Pour leur modélisation, nous assimilons l'élasticité du matériau à celle d'un ressort de raideur **k** et les pertes énergétiques par frottement à celles ayant lieu dans un amortisseur de coefficient de frottement α . Le ressort et l'amortisseur ainsi considérés sont associés en parallèle (Fig.1b). On suppose, de plus, que le poids du caoutchouc est négligeable devant les forces mises en jeu.

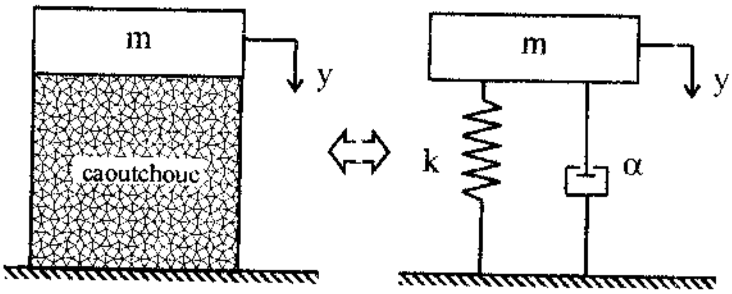


Fig. 1a *Fig. 1b*

1°) On place une masse **m = 1 t** sur un bloc en caoutchouc qui se comprime, alors, d'une distance d. Après une compression supplémentaire, la masse **m** relâchée prend un mouvement oscillatoire amorti autour de sa position d'équilibre que l'on repère par la coordonnée **y**. On mesure l'intervalle de temps, Δt, séparant le 1er et le 6ème maximum. On trouve $\Delta t = 0{,}2$ s. La diminution d'amplitude correspondante est de **60 %.**

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse m.
b) Donner la forme générale de la solution **y(t)**. Comment varie l'amplitude des oscillations ?
c) Déduire de ce qui précède les valeurs de **k** et α.
d) On refait la même expérience avec un autre caoutchouc. On trouve $\alpha' = 4{,}5\times10^3$ kg.s^{-1}. Au bout de combien de temps, $\Delta t'$, obtient-on la même diminution d'amplitude que dans l'expérience précédente ?
e) Quel est le matériau le plus approprié pour la construction ?

2°) Un caoutchouc avec les constantes physiques $k = 25\times10^6$ N.m^{-1} et $\alpha = 10^4$ kg.s^{-1} est, à présent, utilisé dans la construction d'un pont d'autoroute, de masse **M = 12,5 t**. On assimile l'effet du passage des véhicules sur le pont à celui d'une force sinusoïdale d'amplitude F_0 = **10 kN** et de fréquence **f**, appliquée perpendiculairement au pont (Fig. 2).

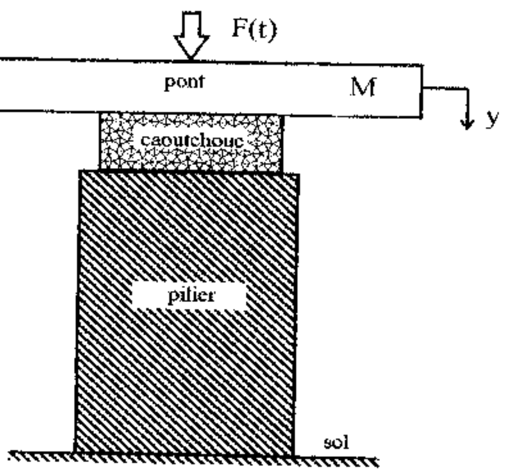


Fig. 2

a) Ecrire l'équation du mouvement du pont pour la coordonnée **y** donnant son déplacement par rapport à l'équilibre.
b) Donner l'expression du déplacement, **y(t)**, en régime permanent, en fonction de la fréquence.
c) Quelle est la fréquence de résonance, f_r , du pont ? Montrer qu'on peut l'assimiler à sa fréquence propre f_0.
d) En déduire l'amplitude maximale à laquelle le pont peut vibrer. Quelle est la phase correspondante ?
e) Calculer l'énergie communiquée au pont pendant un intervalle de temps égal à une période, lorsque le passage des véhicules le fait vibrer à la résonance.
f) Calculer l'énergie correspondante qui se dissipe dans l'amortisseur, pendant le même intervalle de temps. Conclusion ?

EXERCICE / 07pts :

1°) Une sphère homogène de masse m et de rayon R représentée sur la figure 1, peut rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe. L'axe de rotation horizontal, passant par le centre de gravité O_1, est relié à un support fixe, par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k. A l'équilibre le ressort n'est pas déformé et l'état du système est repéré par x_1 (déplacement de O_1 par rapport à l'équilibre). On considérera les oscillations de faible amplitude. On rappelle que le moment d'inertie de la sphère est $J = \frac{2}{5}mR^2$.

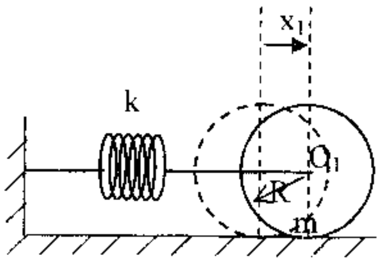


Figure 1

a- Calculer les énergies, cinétique T_1 et potentielle U_1, en fonction de x_1.
b- En déduire l'équation différentielle en x_1 qui régit le mouvement du système.
c- En déduire la pulsations propre ω_{01} du système et la solutions $x_1(t)$

2°) Un deuxième système identique au premier, repéré par la coordonnée x_2, est relié au premier par l'intermédiaire de ressorts de constante de raideur k'. Le nouveau système (figure 2) est donc constitué de deux oscillateurs harmoniques identiques couplés par élasticité. A l'équilibre les ressorts ne sont pas déformés.

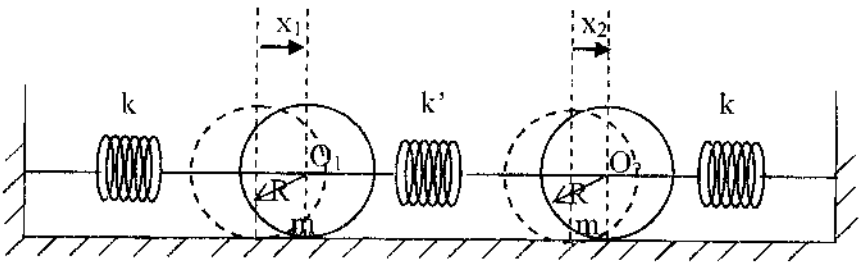


Figure 2

a- Calculer l'énergie cinétique T et potentielle U du système en fonction de x_1 et x_2.
b- En déduire les équations différentielles en x_1 et x_2 qui régissent le mouvement du système.
c- Calculer les pulsations propres ω_1 et ω_2 du système.
d- Ecrire les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en fonction de ω_1 et ω_2, dans le cas général.

U.S.T.H.B. Faculté de Physique Module : PHYS. 1 Année 2006-2007

EMD 1 (Corrigé)

PROBLEME / 13 pts :

1°)

a) $T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2$. $U = \frac{1}{2} k(\Delta l_{eq} - y)^2 - mgy + c^{te}$;

$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \Rightarrow mg = -k\Delta l_{eq} = kd$;

$\Rightarrow U = \frac{1}{2} ky^2 + c^{te}$; $L = T - U = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - \frac{1}{2} ky^2 + c^{te}$. $\mathcal{D} = \frac{1}{2} \alpha \, \dot{y}^2$.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}}\right) \Rightarrow \ddot{y} + 2\delta \, \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$ avec $\delta = \alpha / 2m$ et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ **2 pts**

b) *Mouvement oscillatoire amorti* $\Rightarrow \delta < \omega_0$ et

$y(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$ avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; **1 pt**

L'amplitude des oscillations varie comme : $Ae^{-\delta t}$

c) $T_a = \Delta t / 5$; $T_a = 0{,}2 / 5 = 0{,}04$ s

$D = \frac{1}{n} Ln\left(\frac{y(t)}{y(t + nT_a)}\right)$; $D = \frac{1}{5} Ln\left(\frac{1}{0{,}4}\right) = 0{,}183$

$\delta = D / T_a$; $\delta = 4{,}575 \text{ s}^{-1}$

$\alpha = 2m\delta$; $\alpha = 9{,}15 \times 10^3 \text{ kg.s}^{-1}$

$\omega_0 = \sqrt{(\omega_a)^2 + \delta^2} = \sqrt{(4\pi^2 / T_a^2) + \delta^2}$; $\omega_0 = 157{,}15 \text{ rad.s}^{-1}$ **2 pts**

$k = m\omega_0^2$; $k = 24{,}7 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1}$

d) Rapport d'amplitude correspondant à la même diminution :

$\frac{Ae^{-\delta'(t_0 + \Delta t')}}{Ae^{-\delta' t_0}} = e^{-\delta' \Delta t'} = 0{,}4 \Rightarrow \delta' \Delta t' = \text{Ln}(1/0{,}4) = 0{,}916$; **1 pt**

$\delta' = \alpha' / 2m$; $\delta' = 2{,}25 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \Delta t' = 0{,}916 / \delta' = 0{,}407$ s.

e) Dans la deuxième expérience, on obtient la même diminution d'amplitude au bout d'un temps deux fois plus long $\Rightarrow$ *le premier matériau amortit plus les vibrations et donc est mieux approprié pour la construction.* **0,5 pts**

2°)

a) $\ddot{y} + 2\delta \, \dot{y} + \omega_0^2 y = F(t) / M$ avec $\delta = \alpha / 2M$ et $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ **1 pt**

b) $y(t) = Y_0(f) \cos(2\pi \, f \, t + \varphi)$ avec :

$Y_0(f) = \frac{1}{4\pi} \frac{F_0 / M}{\sqrt{\pi^2 (f_0^2 - f^2)^2 + (\delta \, f)^2}}$; $tg[\varphi(f)] = -\frac{1}{\pi} \frac{\delta \, f}{f_0^2 - f^2}$ et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ **1 pt**

c) $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \Rightarrow f_r = \sqrt{f_0^2 - \delta^2 / (2\pi^2)}$

$f_0 = 7{,}12$ Hz ; $\delta = 0{,}4 \text{ s}^{-1}$; $\delta^2 / (2\pi^2) << f_0^2 \Rightarrow f_r \approx f_0 = 7{,}12$ Hz **1 pt**

d) $Y_{0\max} = Y_0(f_r) \approx Y_0(f_0) = \frac{F_0}{4\pi \, \delta \, M \, f_0} = \frac{F_0}{2\pi \, \alpha \, f_0}$; $Y_{0\max} = 2{,}23$ cm **1 pt**

$tg[\varphi(f_r)] \approx tg[\varphi(f_0)] = -\infty \Rightarrow \varphi(f_r) \approx -\pi / 2$

e) $\mathcal{P}_f(t) = F(t).\dot{y}(t) = -\omega_0 Y_0 F_0 \cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t + \varphi)$;

$\mathcal{E}_f = \int_0^{T_0} \mathcal{P}_f(t).dt = -\omega_0 Y_0 F_0 \int_0^{T_0} \cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t + \varphi).dt = -\omega_0 Y_0 F_0 \dfrac{\sin(\varphi)}{2} T_0$;

$\mathcal{E}_f = \pi Y_0 F_0$; $\mathcal{E}_f = 700{,}6$ J **1 pt**

f) $\mathcal{P}_d(t) = F_\alpha(t).\dot{y}(t) = -\alpha.[\dot{y}(t)]^2 = -\alpha.\omega_0^2 Y_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$;

$\mathcal{E}_d = \int_0^{T_0} \mathcal{P}_d(t).dt = -\alpha.\omega_0^2 Y_0^2 \int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t + \varphi).dt = -\dfrac{1}{2}\alpha.\omega_0^2 Y_0^2 T_0$;

$\mathcal{E}_d = -\pi \alpha \omega_0 Y_0^2$; $\mathcal{E}_d = -698{,}6$ J **1 pt**

$|\mathcal{E}_d| \approx |\mathcal{E}_f| \Rightarrow$ *L'énergie communiquée au pont pendant une période se dissipe complètement dans l'amortisseur.* **0,5 pts**

EXERCICE (7 pts)

1°)

a- $T_1 = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} mR^2\right)\dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{2}{5} m\right)\dot{x}_1^2$

$T_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{5} m\right]\dot{x}_1^2$ (0.5pt) $U_1 = \frac{1}{2}[k]x_1^2$ (0.5pt)

b- $\left[\frac{7}{5} m\right]\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$ (0.5pt)

c- $\ddot{x}_1 + \frac{5}{7}\frac{k}{m} x_1 = 0$ d'où $\omega_{01} = \sqrt{\frac{5k}{7m}}$ (0.5pt) et $x_1(t) = x_{01} \cos\left(\sqrt{\frac{5k}{7m}} t + \varphi_1\right)$ (0.5pt)

2°)

a- $T = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{5} m\right]\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{7}{5} m\right]\dot{x}_2^2$ (0.5pt) et $U = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} k'(x_2 - x_1)^2$ (0.5pt)

b- $\frac{7}{5} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k'(x_1 - x_2) = 0$ (0.5pt) et $\frac{7}{5} m\ddot{x}_2 + kx_2 + k'(x_2 - x_1) = 0$ (0.5pt)

c-
$$\begin{cases} \left[-\omega^2 + \dfrac{5(k+k')}{7m}\right]A + \left[-\dfrac{5k}{7m}\right]B = 0 \\ \left[-\dfrac{5k}{7m}\right]A + \left[-\omega^2 + \dfrac{5(k+k')}{7m}\right]B = 0 \end{cases}$$ (0.5pt)

Le déterminant du système étant nul on obtient les pulsations propres suivantes:

$\omega_1^2 = \frac{5k}{7m}$ (0.5pt) $\omega_2^2 = \frac{5(k+2k')}{7m}$ (0.5pt)

d- pour la première pulsation le rapport d'amplitude $\frac{A_1}{B_1} = +1$ et pour la seconde $\frac{A_2}{B_2} = -1$

$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ (0.5pt)

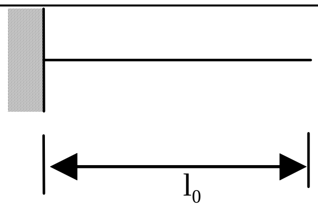
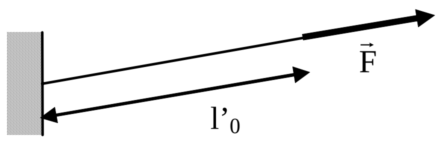
et $x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ (0.5pt)

Matricule :	Nom :	Prénom :	Groupe :

Faculté de Physique	LMD- Filère SM – L2 – S3 : Module	**Vibrations et Ondes**
Premier semestre 2006-2007	Epreuve de synthèse	Durée : 1h30mn

Exercice 1 : (/14 points)

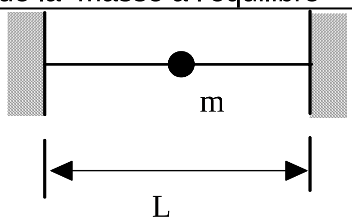
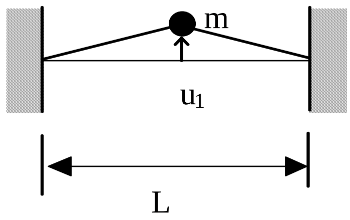
I. QUESTION PRELIMINAIRE

Corde non déformée	Corde déformée
	

On considère une corde de longueur l_0 et de masse négligeable dont l'une des extrémités est fixée à un bâti fixe, l'autre étant tendue avec une tension F supposée constante. Sous l'action de cette tension la corde s'allonge et sa longueur devient l_0'. Montrer que l'énergie potentielle emmagasinée dans la déformation de la corde est donnée par : $U = F\Delta l$ où $\Delta l = l'_0 - l_0$ représente l'allongement de la corde.

Réponse : $\boxed{U = F\Delta l}$

II.CORDE A UNE MASSE

Position de la masse à l'équilibre	Position de la masse en mouvement
	

On considère une corde de longueur L, de masse négligeable, tendue horizontalement avec une tension F. On colle au milieu de cette corde une masse m. Cette masse peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. On considère les petites oscillations transversales de la masse.

1°) Oscillations libres sans frottement :

a) Calculer, en fonction de L et u_1 , l'allongement Δl de chacun des bouts de corde situés de part et d'autre de la masse m lorsqu'elle est en mouvement.

Réponse : $\boxed{\Delta l = \frac{u_1^2}{L}}$

b) En utilisant le résultat de la question préliminaire, montrer que dans le cas des oscillations de faible amplitude l'énergie potentielle se met sous la forme : $U = \frac{1}{2}Ku_1^2$. Préciser l'expression de K en fonction de F et L.

Réponse : $\boxed{K = \frac{4F}{L}}$

c) Etablir l'équation différentielle du mouvement pour u_1.

Réponse : $\boxed{\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}$

b) Sachant qu'à l'instant t=0, la masse est lâchée sans vitesse initiale de la position $u_1(t=0)$= 2cm, et que F=10N, m=100g et L=1m, établir l'équation de u_1 en fonction du temps.

Réponse : $\boxed{u_1(t) = 2\cos(20\,t)(cm)}$

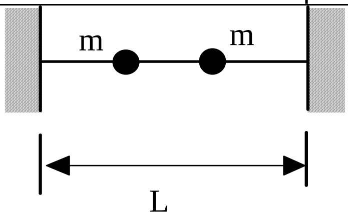
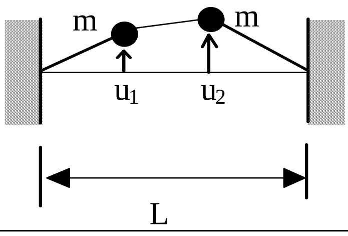
2°) <u>Frottement de faible valeur</u>:

En réalité les frottements sur la masse bien que faibles ne sont pas négligeables. Lorsque le système est abandonné sans vitesse initiale, il effectue des oscillations amorties dont l'amplitude diminue de moitié au bout de 5 périodes. Calculer le coefficient de frottement visqueux α .

Réponse : $\boxed{\alpha = \frac{\omega_0 m}{5\pi} Ln(2) = 0.09\,kg.s^{-1}}$

II.CORDE A DEUX MASSES

Sur la corde de la partie précédente, on colle deux masses identiques m régulièrement espacées. Ces masses peuvent glisser sans frottement sur un plan horizontal. On considère les petites oscillations transversales des masses.

Position des masses à l'équilibre	Position des masses en mouvement
	

a) Calculer l'allongement de chacun des brins de corde en fonction de L, u_1 et/ou u_2 .

Réponse :
$$\boxed{\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{3}{2}\frac{u_1^2}{L} \\ \Delta l_2 &= \frac{3}{2}\frac{u_1^2}{L} + \frac{3}{2}\frac{u_2^2}{L} - 3\frac{u_1 u_2}{L} \\ \Delta l_3 &= \frac{3}{2}\frac{u_2^2}{L} \end{aligned}}$$

b) Montrer que dans le cas des oscillations de faible amplitude, l'énergie potentielle totale se met sous la forme $U = \frac{1}{2}K'\left(u_1^2 + u_2^2 - u_1 u_2\right)$. Donner les expressions de K_1 et K_2 en fonction de F et L.

Réponse : $\boxed{K' = \frac{6F}{L}}$

c) Etablir les équations différentielles satisfaites par u_1 et u_2 .

Réponse : $\boxed{\begin{array}{l} m\ddot{u}_1 + K'u_1 - \frac{K'}{2}u_2 = 0 \\ -\frac{K'}{2}u_1 + m\ddot{u}_2 + K'u_2 = 0 \end{array}}$

d) Déterminer les pulsations propres en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{3F}{mL}}$

Réponse : $\boxed{\begin{array}{l} \omega_1 = \omega_0 \\ \omega_2 = \sqrt{3}\,\omega_0 \end{array}}$

e) Calculer les rapports des amplitudes dans les modes.

Réponse : $\boxed{\mu_1 = +1 \; ; \; \mu_2 = -1}$

c) Calculer $u_1(t)$ et $u_2(t)$ pour les conditions initiales suivantes.

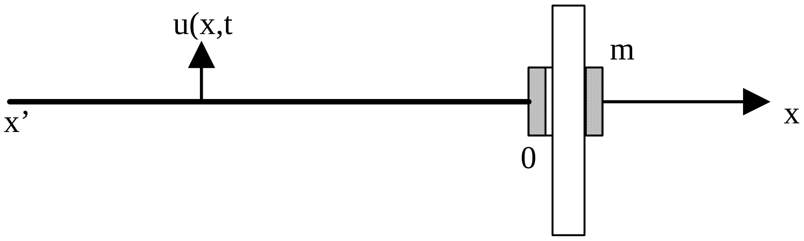
$$u_1(t=0) = u_2(t=0) = u_0 \quad \text{et} \quad \dot{u}_1(t=0) = \dot{u}_2(t=0) = 0$$

Réponse : $\boxed{\begin{array}{l} u_1(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) \\ u_2(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) \end{array}}$

NOM : Prénom :

Exercice 2 : (/ 6 points)

On considère une corde homogène, de longueur semi-infinie, de masse par unité de longueur μ et tendue avec une tension T. Cette corde est terminée en x=0 par une masse m qui glisse sans frottement sur une tige horizontale. Un onde incidente transversale sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude U_0, se propage dans cette corde dans le sens des x croissants et se réfléchit en x=0. L'ensemble du mouvement se fait dans un plan horizontal.



1°) Donner l'expression du coefficient de réflexion en x=0. Quel est son module R et son argument θ.

Réponse :
$$\boxed{\begin{array}{l} r = \dfrac{\sqrt{\mu T} - im\omega}{\sqrt{\mu T} + im\omega} \\ R = \|r\| = 1 \\ \theta = -2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{m\omega}{\mu T}\right) \end{array}}$$

2°) On recherche une solution de la forme : $u(x,t) = A\,e^{i(\omega t - kx)} + B\,e^{i(\omega t + kx)}$. Que représente k ? Donner les expressions de A en fonction de U_0 et B en fonction de U_0 et de θ.

Réponse :
$$\boxed{\begin{array}{l} k : \text{vecteur d'onde} \\ A = U_0 \\ B = e^{i\theta}\,U_0 \end{array}}$$

3°) Montrer que l'onde résultante dans la corde peut s'écrire sous la forme : $u(x,t) = U_0\left[1 + e^{i\phi}\right]e^{i(\omega t - kx)}$. Donner l'expression du déphasage ϕ en fonction de k, x et θ.

Réponse : $\boxed{u(x,t) = U_0\left[1 + e^{i(\theta + 2kx)}\right]e^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow \phi = \theta + 2kx}$

3°) Pour quelles valeurs de ϕ, l'amplitude de l'onde résultante est-elle maximale ?

Réponse : $\boxed{\phi = n\,2\pi \quad , \quad n : \text{entier}}$

4°) Sachant que la distance séparant la masse du maximum qui lui est le plus roche est d, Déterminer l'expression de d en fonction de μ, T, ω et m.

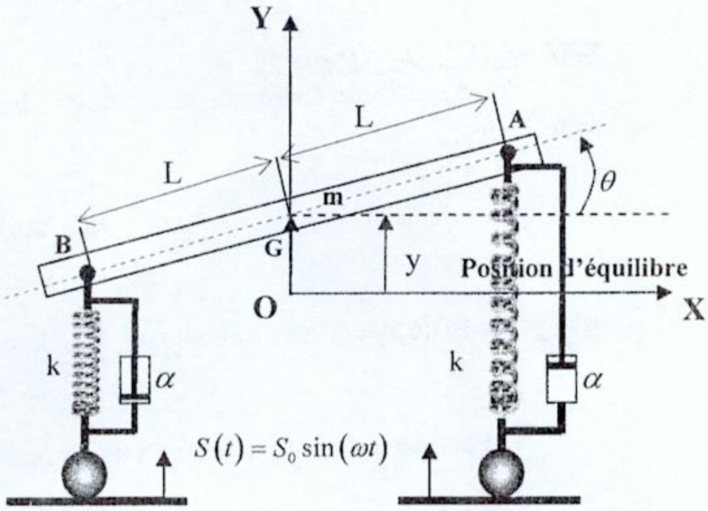
Réponse :
$$\boxed{d = \dfrac{\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}\,.\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{m\omega}{\sqrt{\mu T}}\right)}{\omega}}$$

U.S.T.H.B Faculté de Physique Module : PHYS.1 Année 2006-2007

EMD 2 (1 h 30mn)

EXERCICE 1 (10 pts) :

Lors d'un contrôle technique, un véhicule est installé sur un banc d'essai permettant de communiquer aux roues un mouvement vertical, identique et sinusoïdal $S(t) = S_0 \sin(\omega t)$ (voir figure ci-contre). La suspension est schématisée par deux ressorts identiques de raideur **k** et deux amortisseurs identiques de coefficient de frottement **α**. La masse du véhicule est **m** et son moment d'inertie par rapport à un axe horizontal Δ passant par le centre de gravité **G** est J_G. La voiture peut osciller par rapport à sa position d'équilibre ($y = 0$ et $\theta = 0$). Dans ce qui suit on s'intéresse aux petits mouvements autour de cette position :



- oscillations de **tangage**: rotations d'angle θ autour d'un axe passant par **G** et parallèle à **OZ**.
- oscillations de **pompage**: translations de l'ensemble parallèlement à la verticale **OY**

1°) Quelles sont dans le repère **XOY** les coordonnées des points **A** (x_A, y_A) et **B** (x_B, y_B) de la voiture?

2°) Sachant qu'à l'équilibre le poids du véhicule est compensé par les forces de déformation des deux ressorts, montrer que le lagrangien peut se mettre sous la forme :

$$L_S = \frac{1}{2}\left(m\dot{y}^2 + J_G\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(2y^2 + 2L^2\theta^2 + 2S^2 + \beta y S\right)$$

où β est une constante à préciser.

3°) Déterminer la fonction de dissipation du système mécanique en fonction de $\dot{y}(t), \dot{\theta}(t)$ et $\dot{S}(t)$

4°) Montrer que le système des équations différentielles du mouvement qui régissent les variations au cours du temps des coordonnées y(t) et θ(t) peut s'exprimer par:

$$\begin{cases} \ddot{y}+2\delta_P\,\dot{y}+\omega_P^2 y = A(\omega)\sin[\omega t+\varphi(\omega)] \\ \ddot{\theta}+2\delta_T\,\dot{\theta}+\omega_T^2\theta = 0 \end{cases}$$

Préciser les expressions δ_P, δ_T, ω_P, ω_T , $A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.

5°) En observant la forme de chacune des équations obtenues, décrire qualitativement (**sans calcul**) l'évolution, dans le temps, des solutions $y(t)$ et $\theta(t)$.

EXERCICE 2 (10 pts) :

Une corde de longueur **L**, de masse linéique μ, sous une tension **T**, est parcourue par deux ondes:

$$y_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1) \quad \text{et} \quad y_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$$

où y est le déplacement transversal, ω la pulsation et k le module du vecteur d'onde.

On donne les transformations trigonométriques :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{b+a}{2}\right)\cos\left(\frac{b-a}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

1°) Montrer que la corde est le siège **d'ondes stationnaires.**

2°) Montrer qu'il existe des points sur la corde qui restent toujours immobiles (**nœuds**).

3°) Exprimer la distance Δx entre **deux nœuds successifs** en fonction de **la longueur d'onde**.

4°) La corde étant fixée aux extrémités, montrer que le module du vecteur d'onde ne peut prendre que **certaines valeurs particulières** k_n. En déduire les **valeurs permises** f_n **de la fréquence**.

5°) Sur le violon, la note **mi** de fréquence fondamentale **f = 660 Hz** est obtenue en faisant vibrer une corde de longueur **L = 33 cm** et de masse linéique μ = **5,46x10⁻⁴ kg/m**. Dans ce cas, calculer **la tension** de la corde.

U.S.T.H.B   Faculté de Physique   Module : PHYS.1   Année 2006-2007

EMD 2 (1 h 30mn)

(corrigé)

EXERCICE 1:

1°) Coordonnées des points **A** et **B** :

$$A\begin{cases} x_A = L\cos\theta \\ y_A = y + L\sin\theta \end{cases} \quad \textbf{(0,5pt)} \qquad B\begin{cases} x_B = -L\cos\theta \\ y_B = y - L\sin\theta \end{cases} \quad \textbf{(0,5pt)}$$

2°) **a)** Energie potentielle du système : $U_S = U_{K1} + U_{K2}$

$$U_s = \frac{1}{2}k(y_A - S)^2 + \frac{1}{2}k(y_B - S)^2$$

$$U_S = \frac{1}{2}k\left(2y^2 + 2L^2\theta^2 + 2S^2 - 4yS\right) \quad \textbf{(01pt)}$$

b) Energie cinétique du système : $T_S = \frac{1}{2}\left(m\dot{y}^2 + J_G\dot{\theta}^2\right)$ **(0,5pt)**

c) Lagrangien:

$$L_S = T_S - U_S = \frac{1}{2}\left(m\dot{y}^2 + J_G\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}k\left[2y^2 + 2L^2\theta^2 + 2S^2 - 4yS\right]; \text{ d'où: } \beta = -4$$

(0,5pt)

3°) Fonction de dissipation :

$$D_S = D_1 + D_2 = \frac{1}{2}\alpha\left[\left(\dot{y}_A - \dot{S}\right)^2 + \left(\dot{y}_B - \dot{S}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\alpha\left[2\dot{y}^2 + 2L^2\dot{\theta}^2 - 4\dot{y}\dot{S} + 2\dot{S}^2\right] \quad \textbf{(01pt)}$$

4°) Equations du mouvement :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L_S}{\partial \dot{y}}\right) - \dfrac{\partial L_S}{\partial y} = -\dfrac{\partial D_S}{\partial \dot{y}} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L_S}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L_S}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial D_S}{\partial \dot{\theta}} \end{cases} \quad \textbf{(01pt)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + 2ky = 2kS + 2\alpha\dot{S} \\ J_G\ddot{\theta} + 2\alpha L^2\dot{\theta} + 2kL^2\theta = 0 \end{cases} \quad \textbf{(01pt)}$$

$$\begin{cases} m\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + 2ky = 2kS_0\sin\omega t + 2\alpha\omega S_0\cos\omega t \\ J_G\ddot{\theta} + 2\alpha L^2\dot{\theta} + 2kL^2\theta = 0 \end{cases} \quad \textbf{(01pt)}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\delta_P\dot{y} + \omega_P^2 y = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t \\ \ddot{\theta} + 2\delta_T\dot{\theta} + \omega_T^2\theta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{y} + 2\delta_P\dot{y} + \omega_P^2 y = A(\omega)\sin[\omega t + \varphi(\omega)] \\ \ddot{\theta} + 2\delta_T\dot{\theta} + \omega_T^2\theta = 0 \end{cases}$$

$\delta_P = \dfrac{\alpha}{m}$ **(0,25pt)**; $\omega_P = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ **(0,25pt)**; $\delta_T = \dfrac{\alpha L^2}{J_G}$ **(0,25pt)** ; $\omega_T = L\sqrt{\dfrac{2k}{J_G}}$ **(0,25pt)**

$A(\omega) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = S_0\sqrt{\omega_P^2 + 4\delta_P^2\omega^2}$ **(0,5pt)** ; $tg\varphi = \dfrac{C_2}{C_1} = \dfrac{2\delta_P\omega}{\omega_P^2}$ **(0,5pt)**

5°) Au bout d'un certain temps, les oscillations de tangage $\theta(t)$ disparaissent et un mouvement de pompage $y(t)$ sinusoïdal s'établit (régime permanent). **(01pt)**

EXERCICE 2 :

1°) $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

$$y(x,t) = A[\cos(\omega t - kx + \varphi_1) + \cos(\omega t + kx + \varphi_2)]$$

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$$

$y(x,t) = 2A\cos(kx + \psi)\cos(\omega t + \varphi)$ représente une onde stationnaire **(02pts)**

2°) Les nœuds sont les points tels que $y(x,t) = 0 \quad \forall t$, c'est-à-dire que:

$$\cos(kx + \psi) = 0 \quad \textbf{(0,5pt)}$$

D'où :

$$kx + \psi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x_n = \left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \psi\right]/k \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

3°) $\Delta x = x_{n+1} - x_n = [2(n+1)+1]\dfrac{\pi}{2k} - (2n+1)\dfrac{\pi}{2k} = \dfrac{\pi}{k}$; $\quad k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} \quad \textbf{(01pt)}$$

4°)

La corde étant fixée à ses extrémités x=0 et x=L, l'onde stationnaire a un nœud en x=0 et un nœud en x=L.

Les conditions aux limites :

- $y(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2A\cos\psi\cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\psi = 0 \Rightarrow \psi = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ **(01pt)**
- $y(L,t) = 0$

$$\Rightarrow 2A\cos\left[kL + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]\cos(\omega t + \varphi) = -2A\sin kL\sin[(2n+1)\frac{\pi}{2}]\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \sin kL = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n\pi \qquad \Rightarrow \quad k_n = n\frac{\pi}{L} = \frac{\omega_n}{V} = \frac{2\pi f_n}{V} \quad \textbf{(01pt)}$$

D'où: $\quad f_n = n\dfrac{V}{2L} \quad$ où V est la vitesse de phase de l'onde. **(01pt)**

5°) Corde du violon: $L = 33cm$, $\mu = 5{,}46x10^{-4}\, kg/m$

La fréquence du fondamental est:

$$f = \frac{V}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 660Hz \qquad \textbf{(02pts)}$$

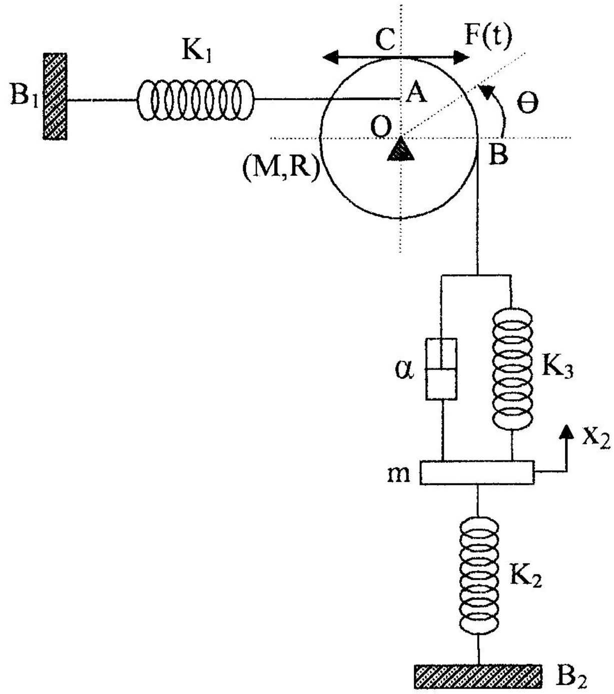
D'où:

$T = 4L^2\mu f^2$ **(0,5pt)** **A.N :** $T = 104N$ **(0,5pt)**

EXAMEN DE SYNTHESE
(Durée : 2heures)

EXERCICE 1 : (/10 pts)

On considère le système mécanique représenté sur la figure ci-contre. Il est constitué d'un cylindre plein, homogène, de masse **M** et de rayon **R**. Ce cylindre peut tourner autour d'un axe fixe passant par le point **O** de son axe de révolution. Il est relié au point **A**, tel que **OA=R/2**, au bâti fixe $\mathbf{B_1}$ par un ressort horizontal de constante de raideur $\mathbf{K_1}$. Une masse ponctuelle **m**, reliée au bâti fixe $\mathbf{B_2}$ par un ressort vertical de raideur $\mathbf{K_2}$, est couplée au cylindre par un ressort de raideur $\mathbf{K_3}$ et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux $\boldsymbol{\alpha}$ au moyen d'un fil inextensible, sans raideur et de masse négligeable qui s'enroule autour du cylindre. A l'équilibre, le point **A** se trouve sur la verticale et le point **B** sur l'horizontale passant toutes les deux par **O**. On s'intéressera aux oscillations de faible amplitude, la masse **m** est repérée par son élongation $\mathbf{x_2}$ et le cylindre par l'angle $\boldsymbol{\Theta}$ mesurés par rapport à la position d'équilibre.



On applique au point **C** du cylindre une force horizontale sinusoïdale, d'amplitude $\mathbf{F_0}$ et de pulsation $\boldsymbol{\omega}$.

1/ En supposant qu'à l'équilibre le poids de la masse **m** est compensé par les forces de déformation des ressorts, déterminer le lagrangien du système.

2/ Déterminer les équations différentielles du mouvement en fonction des coordonnées $\mathbf{x_1=R\Theta}$ et $\mathbf{x_2}$. En déduire les équations intégro-différentielles pour les vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$.

3/ Donner le schéma électrique équivalent dans l'analogie **Force-Tension** en précisant l'équivalence entre les différents éléments.

4/ Calculer l'impédance d'entrée $Z_e = \dfrac{F(t)}{\dot{x}_1(t)}$ du système mécanique dans le cas où $\omega^2 = \dfrac{K_2}{m}$ et en déduire les vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$.

5/ Décrire le comportement du circuit électrique à la pulsation équivalente à $\omega = \sqrt{\dfrac{K_2}{m}}$ en donnant le schéma correspondant.

EXERCICE 2 (/10 pts) :

Un tuyau semi infini de section $S = 0.05m^2$ renfermant un gaz de densité $\rho = 1.29kg/m^3$ est fermé au point d'abscisse $x = L$ par une impédance terminale Z_L (fig.2a). On envoie de $-\infty$ une onde plane de pression $p_i(x,t) = p_0 \exp j(\omega t - kx)$, d'intensité $I_0 = 10^{-6} W/m^2$ et se propageant avec une vitesse $V = 340m/s$.

1°) Le tuyau étant le siège d'une onde **progressive** :

a) déterminer l'amplitude de cette onde,

b) calculer la valeur de l'impédance terminale Z_L.

On place maintenant au point d'abscisse $x = 0$ et perpendiculairement à l'axe Ox, une paroi d'épaisseur négligeable qu'on assimile à un piston de masse M maintenu par un ressort de coefficient de raideur K (fig.2b). On appellera $p_1(x,t)$ et $p_2(x,t)$ les ondes de pression dans les régions $x < 0$ et $0 < x < L$ respectivement.

2°) Donner les expressions de $p_1(x,t)$ et de $p_2(x,t)$ en fonction des coefficients de réflexion r et de transmission t, **en pression**. En déduire les expressions des vitesses de particules $\dot{u}_1(x,t)$ et $\dot{u}_2(x,t)$.

3°) a) Ecrire la condition de continuité de la vitesse particulaire au plan d'abscisse $x = 0$.

b) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour la paroi de masse M.

c) En déduire l'expression des coefficients de réflexion r et de transmission t en fonction de la masse M, de l'impédance caractéristique Z_C, de la section S et de la pulsation ω. Montrer qu'ils peuvent se mettre sous les formes $r = \dfrac{jX}{1+jX}$ et $t = \dfrac{1}{1+jX}$ où X est une fonction réelle de ω que l'on précisera.

4°) Pour quelle valeur de la pulsation ω a t-on $|t| = 1$?

5°) a) Déterminer l'impédance au plan $x = 0$ en fonction de ω.

b) Que devient cette impédance dans le cas où $\omega = \omega_0 = \sqrt{K/M}$?

c) Quelle est dans ce cas là, la valeur de l'impédance $Z(x)$ en un plan $x < 0$?

6°) On se met dans le cas où $M\omega >> \dfrac{K}{\omega}$.

a) Que devient l'expression de l'impédance au plan d'abscisse $x = 0$?

b) Déterminer le coefficient de transmission en intensité $T = I_t/I_i$ où I_t et I_i sont respectivement les intensités transmise et incidente du son.

c) Déterminer la masse que doit avoir la paroi si on veut obtenir à la fréquence $f = 2KHz$, une atténuation d'intensité égale à $-20dB$.

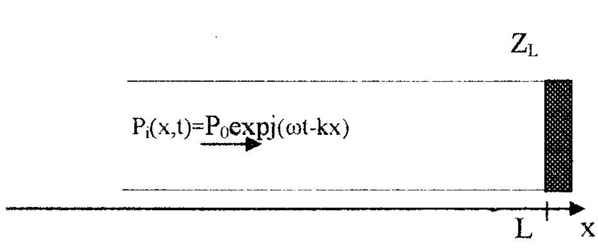


Fig.2a

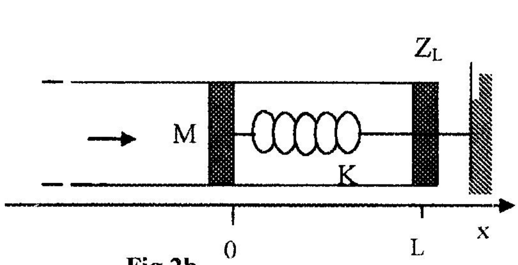


Fig.2b

Corrigé de la synthèse 2006/2007

Exercice 1 : (10pts)

1°/ $T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$ (1pt)

$V = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{R}{2}\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k_3(x_2 - R\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2$ (1pt)

$L = T - V$

2°/ En fonction de $x_1 = R\theta$ et x_2, L devient

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{4}\right)x_1^2 - \frac{1}{2}k_3(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_2 x_2^2$$

$D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$ (0.5pt)

(0.5pt)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + F(t) \Rightarrow \frac{M}{2}\ddot{x}_1 + \frac{k_1}{4}x_1 + k_3(x_1 - x_2) + \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} \Rightarrow m\ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_3(x_1 - x_2) - \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0$$

(0.5pt)

Eqts intégro-différentielles :

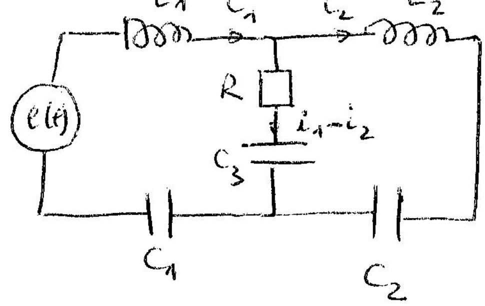
$$\begin{cases} \frac{M}{2}\frac{d\dot{x}_1}{dt} + \frac{k_1}{4}\int \dot{x}_1 dt + \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_3\int(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)dt = F(t) & \text{(0.5pt)} \\ m\frac{d\dot{x}_2}{dt} + k_2\int \dot{x}_2 dt - \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_3\int(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)dt = 0 & \text{(0.5pt)} \end{cases} \quad (I)$$

3°/ Analogie Force-Tension : $\frac{M}{2} \Leftrightarrow L_1$; $m \Leftrightarrow L_2$; $\alpha \Leftrightarrow R$; (0.5pt)

$\frac{k_1}{4} \Leftrightarrow C_1^{-1}$, $k_2 \Leftrightarrow C_2^{-1}$; $k_3 \Leftrightarrow C_3^{-1}$; $\dot{x}_{1,2} \Leftrightarrow i_{1,2}$; $F(t) \Leftrightarrow e(t)$

$$\begin{cases} L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt + R(i_1 - i_2) + \frac{1}{C_3}\int(i_1 - i_2)dt = e(t) & \text{(0.5pt)} \\ L_2\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt - R(i_1 - i_2) - \frac{1}{C_3}\int(i_1 - i_2)dt = 0 & \text{(0.5pt)} \end{cases} \quad (II)$$

schéma équivalent :



(1pt)

4°/ $F(t) = F_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{x}_1 = A_1 e^{j\omega t}$ et $\dot{x}_2 = A_2 e^{j\omega t}$ (régime permanent)

$$(I) \Rightarrow \begin{cases} \left[\alpha + j\left(\frac{M}{2}\omega - \frac{k_1}{4\omega} - \frac{k_3}{\omega}\right)\right]\dot{x}_1 - \left(\alpha - j\frac{k_3}{\omega}\right)\dot{x}_2 = F(t) & (1) \quad \text{(0.5pt)} \\ \left[\alpha + j\left(m\omega - \frac{k_2 + k_3}{\omega}\right)\right]\dot{x}_2 - \left(\alpha - j\frac{k_3}{\omega}\right)\dot{x}_1 = 0 & (2) \quad \text{(0.5pt)} \end{cases}$$

Pour $\omega^2 = \frac{k_2}{m}$, c'est à dire $m\omega = \frac{k_2}{\omega}$, l'équation ② donne

$$\left(\alpha - j\frac{k_3}{\omega}\right)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x}_1 \quad (3)$$

et l'équation ① $\Rightarrow j\left(\frac{M}{2}\omega - \frac{k_1}{4\omega}\right)\dot{x}_1 = F(t)$

d'où $$Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_1} = j\left(\frac{M}{2}\omega - \frac{k_1}{4\omega}\right) \quad (4)$$ 0,5pt

et $$\dot{x}_1 = \frac{F(t)}{Z_e} = \frac{F_0}{\frac{M}{2}\omega - \frac{k_1}{4\omega}}\, e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

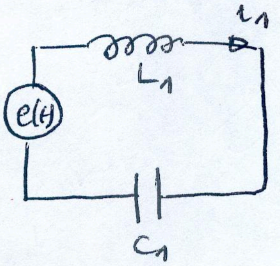
$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1$$ 0,5pt

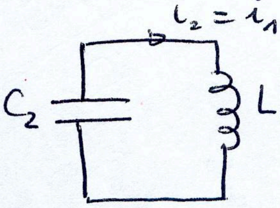
5/ La pulsation du circuit électrique équivalente à $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$ est $\omega_e = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$. A cette pulsation, on a par analogie $i_2 = i_1$, et par suite les équations électriques (II) sont découplées et donnent :

$$L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt = e(t) \qquad \text{oscillations forcées}$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = 0 \qquad \text{oscillations libres}$$

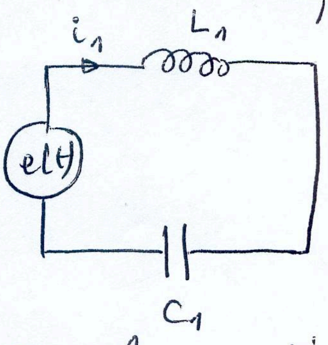
A ces 2 équations, il correspond 2 mailles :





1pt

– ou bien, à partir du schéma électrique établi à la question 3, lorsque $\omega_e = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$, l'impédance de la branche contenant L_2 et C_2 est nulle et le schéma équivalent est le suivant :



<u>Remarque</u> : Pour la question 5, les 2 réponses précédentes seront acceptées.

EXERCICE 2 :

1°) a) $p_0 = \sqrt{2\rho V I_0} = \sqrt{2\times 1.29\times 340\times 10^{-6}} = 29.62\times 10^{-3} N/m^2$ **((0.5+0.5) pt)**

b) l'onde qui se propage c'est l'onde incidente

$$Z_L = \frac{p(L,t)}{S\dot{u}(L,t)} = \frac{p(L,t)}{\frac{Sp(L,t)}{\rho V}} = \frac{\rho V}{S} = Z_C = \frac{1.29\times 340}{0.05} = 8772\ kg/m^4 s \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

2°) $p_1(x,t) = p_i(x,t) + p_r(x,t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)} + rp_0 e^{j(\omega t + kx)}$ **(0.5 pt)**

$p_2(x,t) = p_t(x,t) = tp_0 e^{j(\omega t - kx)}$

Pour déterminer les vitesses on utilise par exemple la relation $p(x,t) = -\kappa \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

$$\dot{u}_1(x,t) = \frac{1}{\rho V}\left(p_0 e^{j(\omega t - kx)} - rp_0 e^{j(\omega t + kx)}\right) \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

$$\dot{u}_2(x,t) = \frac{1}{\rho V} tp_0 e^{j(\omega t - kx)} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

3°) a) Continuité du débit $\Rightarrow$ continuité de la vitesse car même section :

$$\dot{u}_1(0,t) = \dot{u}_2(0,t) \Rightarrow \frac{p_0}{\rho V}(1-r) = \frac{tp_0}{\rho V} \Rightarrow 1 - r = t \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

b) RFD pour la masse M :

$$Sp_1(x,t) - Sp_2(x,t) - Ku(x,t)\ \Big|_{x=0} = M\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ \Big|_{x=0} \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

c) $Sp_1(x,t) - Sp_2(x,t)\ \Big|_{x=0} = K\int \dot{u}(x,t)\,dt + M\frac{\partial \dot{u}(x,t)}{\partial t}\ \Big|_{x=0}$

$$S(p_0 e^{j\omega t} + rp_0 e^{j\omega t} - tp_0 e^{j\omega t})) = j\,(M\omega - \frac{K}{\omega})\frac{tp_0}{\rho V}e^{j\omega t}$$

$$S(1 + r - t) = j\,(M\omega - \frac{K}{\omega})\frac{t}{\rho V} \quad \text{soit} \quad S(1 + r - t) = j\,(M\omega - \frac{K}{\omega})\frac{t}{SZ_C} \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

En utilisant la relation entre les coefficients de réflexion et de transmission on aboutit aux relations suivantes :

$$t = \frac{1}{1 + j\,(M\omega - \frac{K}{\omega})\times\frac{1}{2S^2 Z_C}} = \frac{1}{1 + jX} \quad \text{avec } X = \frac{1}{2S^2 Z_C}(M\omega - \frac{K}{\omega}) \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

$$r = \frac{\frac{j\,(M\omega - K/\omega)}{2S^2 Z_C}}{1 + j\,(M\omega - \frac{K}{\omega})\times\frac{1}{2S^2 Z_C}} = \frac{jX}{1 + jX} \qquad (0.5\ \text{pt})$$

4°) $|t| = \dfrac{1}{\left[1+\left(\left(M\omega - \dfrac{K}{\omega}\right)\times\dfrac{1}{2S^2Z_C}\right)^2\right]^{1/2}}$

$|t| = 1$ si $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$ **(0.5 pt)**

5°) a) $Z(0) = \dfrac{p_1(0,t)}{S\dot{u}_1(0,t)} = \dfrac{p_0 e^{j\omega t}(1+r)}{\dfrac{S}{\rho V} p_0 e^{j\omega t}(1-r)} = Z_C \dfrac{(1+r)}{(1-r)}$ **(0.5 pt)**

$Z(0) = Z_C + j\dfrac{(M\omega - \dfrac{K}{\omega})}{S^2}$ **(0.5 pt)**

b) Pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$ $\quad Z(0) = Z_C = \dfrac{\rho V}{S}$ **(0.5 pt)**

c) L'impédance en tout plan x<0 est égale à l'impédance caractéristique $Z_C = \dfrac{\rho V}{S}$ **(0.5 pt)**

6°) $M\omega >> \dfrac{K}{\omega}$

a) $Z(0) = Z_C + j\dfrac{M\omega}{S^2}$ **(0.5 pt)**

b) $T = \dfrac{I_t}{I_i} = \dfrac{\frac{1}{2}|t|^2 p_0^2}{\frac{1}{2} p_0^2} = |t|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{M\omega}{2S^2Z_C}\right)^2}$ **(0.5 pt)**

c) $-20\ dB = 10 Log\dfrac{I_t}{I_i} = 10 LogT = 20 Log|t|$ **(0.5 pt)**

$|t| = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{M\omega}{2S^2Z_c}\right)^2} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad 1 + \dfrac{M^2\omega^2}{4S^4Z_C^2} = 100$

$M = \sqrt{\dfrac{99\times 4\times S^4\times Z_C^2}{\omega^2}} = 34.7\times 10^{-3} kg$ **(0.5pt)**