Théorie du point fixe

1. Rappel
   - Ensemble ordonné
   - Majorant, Minorant
   - Borne inférieure
   - borne supérieure
   - Treuilli
   - treuilli complet
   - Fonction croissante
   - Fonction continue
2. Théorème du point fixe
   - Énoncé
   - Démonstration

Théorie du point fixe

Rappel

- **Ensemble ordonné**

Un ensemble ordonné est un ensemble muni d'une relation d'ordre, c'est à dire une relation qui est réflexive et transitive.

- **Majorant d'une partie d'un ensemble**

Soient

- E un ensemble ordonné par la relation < et,

- X une partie de E .

On dit qu'un élément a dans E est majorant de X ,si quelque soit x dans X, on a x<a.

Théorie du point fixe

Rappel

- **Minorant d'une partie d'un ensemble.**

Soient

- E un ensemble ordonné par la relation $<$ et,

- X une partie de E .

On dit qu'un élément a dans E est minorant de X , si quelque soit x dans X, on a $a<x$.

Théorie du point fixe

Rappel

- **Borne inférieure:**

on appelle borne inférieure d'une partie X d'un ensemble ordonné le plus grand élément s'il existe de l'ensemble des Minorants .

- **Borne supérieure:**

on appelle borne supérieure d'une partie X d'un ensemble ordonné le plus petit élément s'il existe de l'ensemble des Majorants.

Théorie du point fixe

Rappel

- **Treuilli**

un treuilli est un ensemble ordonné dans lequel tout sous ensemble de deux éléments (x,y) a une borne inférieure et une borne supérieure.

- **Treuilli complet (ensemble ordonné inductif).**

Un treuilli(E,<) est dit complet si toute partie A de E admet une borne supérieure et une borne inférieure. E admet un plus grand élément et un plus petit élément.

Théorie du point fixe

Rappel

- **Fonction croissante**

Une fonction f de E dans F est dite croissante si pour tout couple (x,y) de E on a:

$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$

Théorie du point fixe

Rappel

- **Fonction continue**

Soit (E,<) et(F,<) deux treuillis complets et f une application de E dans F. f est continue si pour toute suite croissante (xn) d'éléments de E

f(Sup[xn , n dans N]) = Sup [f(xn) , n dans N]

L'image du plus petit majorant de A=[x1,x2,...xn] par f est egale au plus petit majorant de f(A)=[f(x1),f(x2),..,f(xn)]

L'image de la borne supérieure de A=[x1,x2,...xn] par f est egale a la borne supérieure de f(A)=[f(x1),f(x2),..,f(xn)]

f(Sup A) = Sup f(A)

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe : Énoncé

Soient (E<) un Treuilli complet et F une fonction de E dans E .

<u>Partie 1 :</u>

Si F est croissante. alors il existe une solution minimale x0 à l'équation F(x) = x. c.a.d. x0 est solution et toute autre solution y est telle que x0 < y.

<u>Partie 2 :</u>

Si de plus, F est continue x0 est égale à la limite de la suite Fn(bi), bi étant la borne inférieure de E.

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe : Démonstration Première partie

Soit A une partie de E définie comme suit:

A=[y dans E tel que f(y)< y]

Soit x0 = Inf A la borne inférieure de A qui existe toujours puisque E est un treuilli.

Quelque soit y de A on a : x0 < y

On a l' implication suivante : x0 < y ==> f(x0)< f(y) puisque f est croissante.

Comme f(y) < y on a, à fortiori f(x0) <y

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe :Démonstration Première partie

De cette relation, on déduit que $f(x0)$ est un minorant. Comme $x0$ est le plus grand des minorants de A (borne inférieure), on a:

$f(x0) < x0$ (1) Ceci d'une part.

D'autre part:

$f(x0) < x0$

$f(f(x0)) < f(x0)$ (f croissante)

Cette dernière relation est de la forme : $f(y) < y$

Ce qui signifie que $f(x0)$ est dans A.

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe : Démonstration Première partie

- **<u>Conséquences :</u>**

  Si y0 est tel que f(y0) = y0 alors y0 appartient à A (par définition de A).

  Comme x0 est la solution minimale,

  x0 < y0

  (En d'autres termes, si y0 est solution de l'équation f(x) = x, alors cette solution est supérieure ou egale à la solution minimale x0 = Inf A.)

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe :Démonstration Deuxième partie

bi étant la borne inférieure de E (bi = Inf E), on a :

$bi < x0$

$f(bi) < f(x0)$ Puisque f est croissante

Comme $f(x0) = x0$, on déduit que $f(bi) < x0$ (3)

De même, puisque f est croissante (3) implique:

$f(f(bi)) < f(x0)$

$f^2(bi) < x0$ $(f(x0) = x0)$

Et par récurrence,

quelque soit n dans N:

$f^n(bi) < x0$

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe : Démonstration Deuxième partie

La suite bi, f(bi), (f(bi)), ... est croissante. En effet,

bi < f(bi) < f(f(bi)) < ...

Car bi est le plus petit élément de E.

Cette suite admet aussi une borne supérieure notée Sup [fn(bi), n dans N] du fait que c'est une partie de E.

En plus,

Sup[f^n(bi) n dans N] <x0 (4) Ceci d'une part.

Et d'autre part, d'après le théorème de la continuité, on a :

f(Sup [f^n(bi), n dans N]) = Sup[f^{n+1}(bi), n dans N]

= Sup[f(bi), n dans N]

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe : Démonstration Deuxième partie

C'est de la forme $f(x) = x$,

on conclut que:

Sup[$f^n(bi)$, n dans N] appartient à A, et par conséquent on a:

$x0 < \text{Sup}[\ f^n(bi)\ n \text{ dans } N\ ]$ (5)

Ce qui nous permet de conclure de (4) et (5) :

$$x0 = \text{Sup}[\ f^n(bi), n \text{ dans } N\ ] = \text{Lim}_n\ f^n(bi)$$

n--> infini