على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;5;4)$ ، $B(10;4;3)$ ، $C(4;3;5)$ و $D(0;4;5)$

1) أ) بيّن أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية.

ب) بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي.

جـ) استنتج أنّ النقطة D هي مرجح النقط A ، B و C المرفقة بمعاملات يطلب تعيينها.

د) عيّن إحداثيات النقطة E نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D.

هـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathscr{P})$ المحوري للقطعة $[AE]$.

2) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MD}-3\overrightarrow{MA}\right\|$.

3) أ) تحقق أنّ النقطة $F(1;8;10)$ تنتمي إلى المستوي $(\mathscr{P})$.

ب) المستقيم (FD) يقطع (Γ) في النقطتين G و H.

حدّد طبيعة الرباعي $AGEH$ ، ثم احسب مساحته.

4) (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة D ويعامد المستوي (AEH).

أ) بيّن أنّ الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظمي للمستوي (AEH).

ب) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي t ، النقطة $N(3t;4-2t;5+t)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي t ، حجم المجسم $NAGEH$ هو $v(t)$ حيث $v(t)=2|t|\sqrt{14}\ uv$.

(uv وحدة الحجوم).

د) عيّن إحداثيات كل من النقطتين N_1 و N_2 من (Δ) اللتين يكون من أجلهما $v(t)=2\sqrt{3}\ uv$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C ، H و I لاحقاتها

على الترتيب: $z_A = i$ ، $z_B = -2+i$ ، $z_C = -3$ ، $z_H = -3+4i$ و $z_I = -1-i$.

1) أ) مثّل النقط A ، B ، C ، H و I في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

ب) عيّن النسبة وزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه B ويحوّل النقطة A إلى النقطة C.

2) عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

3) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$.

ب) استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.

جـ) بيّن أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

4) بيّن أن النقط G ، H و I في استقامية.

5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z+1+i=\sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

أ) بيّن أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ).

ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة.

جـ) أنشئ المجموعة (Γ).

د) تحقق أنّ النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $\left[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}\right]$ على 7.

2) أ) بيّن أنّ 89 عدد أوّلي.

ب) عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.

جـ) بيّن أنّ العددين 981 و 977 أوّليان فيما بينهما.

3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2.

عيّن x و y علماً أنّ: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$.

4) a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أوّلي مع b و a أوّلي مع c.

أ) باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أنّ a أوّلي مع $b \times c$.

ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $PGCD(a;b^n)=1$.

(يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر.)

جـ) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة بـ $f(0)=1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ ، $f(x)=1-x^2\ln x$.

(C_f) منحنى الدالة f الممثل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين.

ب) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{f(x)-1}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) أ) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$.

ب) تحقق أن $1,531<\alpha<1,532$

4) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(|x|)$.

(C_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ) ادرس شفعية الدالة g .

ب) أنشئ المنحنى (C_g) على المجال $[-2,2]$.

5) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عين الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto x^2\ln x$ المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ ، والتي تنعدم من أجل القيمة 1 .

6) t عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0,\alpha]$ نضع $F(t)=\int_t^{\alpha} f(x)\,dx$.

أ) اكتب العبارة $F(t)$ بدلالة t و α .

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $]0,\alpha]$ ، $F(t)=\dfrac{-3t\,f(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$.

هـ) احسب $\lim\limits_{t \to 0} F(t)$.

7) m عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0,\alpha]$.

$S(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ O ونصف القطر m .

نفرض أن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما على الترتيب: $x=-\alpha$ و $x=\alpha$ ، هي: $\mathcal{A}$ حيث: $\mathcal{A}=\dfrac{2}{9}\left(\alpha^3+6\alpha\right)\,ua$

(ua وحدة المساحات).

أ) عين القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $S(m)=2\mathcal{A}$.

ب) علما أن $3,140<\pi<3,142$ أعط حصرا للعدد m .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة ، في كل حالة من الحالات الأربع الآتية ، مع التعليل.

1) الحد العام للمتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ هو:

أ) $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$ ، ب) $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، جـ) $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{3}{2}$.

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z ، حيث $|iz-1-i| = 3$ هي: أ) دائرة نصف قطرها 3 ولاحقة مركزها $1+i$.

ب) دائرة نصف قطرها 3 ولاحقة مركزها $1-i$.

جـ) دائرة نصف قطرها 3 ولاحقة مركزها $-1+i$.

3) a ، b ، c و d أعداد طبيعية غير معدومة وأصغر من أو تساوي 9.

$\overline{abcd}$ عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري.

من أجل كل الأعداد a ، b ، c و d : يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان:

أ) العدد $(a-b+c-d)$ يقبل القسمة على 11.

ب) العدد $(a+b+c+d)$ يقبل القسمة على 11.

جـ) العدد $\overline{cd}$ المكتوب في النظام العشري، يقبل القسمة على 11.

4) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. مجموعة النقط M من الفضاء ذات الإحداثيات $(x;y;z)$ حيث

$$\begin{cases} x = 1+\frac{2}{3}t-k \\ y = 2-t+\frac{3}{2}k \\ z = -3+4t-6k \end{cases} \quad ;(t\in\mathbb{R});(k\in\mathbb{R})$$

هي: أ) المجموعة $\{A\}$ حيث $A(1;2;-3)$.

ب) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;2;-3)$ و $\vec{u}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2};-2\right)$ شعاع توجيه له.

جـ) المستوي الذي يشمل النقطة $A(1;2;-3)$ و $\vec{n}(3;-2;-1)$ شعاع ناظمي له.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - 2\left(1-\sqrt{3}\right)z + 8 = 0 \qquad \text{(لاحظ أن: } \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4+2\sqrt{3}\text{)}$$

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A و B نقطتان من المستوي ، لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = \left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$ و $z_B = \overline{z_A}$.

2) أ) بيّن أنّ: $\frac{z_B}{z_A}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$.

ب) استنتج عمدة للعدد المركّب z_A.

جـ) استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

3) أ) حل ، في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $7x-2y=1$.

ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلا للمعادلة $7x-24y=12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12.

جـ) استنتج كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلولا للمعادلة $7x-24y=12$.

د) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماماً.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(2;0;0)$ و $B(-1;-5;-1)$.

(Δ_1) المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-1;2;-1)$ شعاع توجيه له.

(Δ_2) المستقيم المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=-3-3t\\y=2+2t\\z=7+3t\end{cases}$

(d) المستقيم الذي يشمل النقطة B و $\vec{v}(2;5;3)$ شعاع توجيه له.

1) بيّن أنّ المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في النقطة C يُطلب تعيين إحداثياتها.

2) بيّن أنّ المستقيمين (Δ_1) و (d) ليسا من نفس المستوي.

3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

ب) استنتج أنّ $4x+3y+2z-8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$.

جـ) تحقق من أنّ النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي $(\mathcal{P})$.

4) أ) بيّن أنّه توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (d) وتوجد نقطة وحيدة D من المستقيم (Δ_2) حيث النقط A ، I و D في استقامية؛ يُطلب تعيين إحداثيات النقطتين I و D.

ب) بيّن أنّ النقطة I هي منتصف القطعة $[AD]$.

5) النقطة K مرجح الجملة المثقلة $\{(B;1),(I;2)\}$ والنقطة G المسقط العمودي للنقطة K على المستوي $(\mathcal{P})$.

أ) بيّن أنّ النقطة G هي مرجح النقط A ، C و D المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها.

ب) استنتج إحداثيات النقطة G.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرّفة بـ: $f(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثّل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

2) احسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$.

ب) استنتج أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$، يُطلب تعيين معادلة له.

5) g الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ : $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

6) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)>x$.

ب) استنتج وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

جـ) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

7) (u_n) المتتالية المعرّفة بـ: $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$.

ب) حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

8) m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغيّر الحقيقي x المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ :

$$h_m(x)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$$

أ) احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقّة للدالة h_m.

ب) باستعمال المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة

$h'_m(x)=0$.