حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول:

1) التحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا وأن $x-y+z-1=0$ معادلة ديكارتية له:

لدينا $A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(3;3;1)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ ونلاحظ أن $x_{\overrightarrow{AB}}=-x_{\overrightarrow{AC}}$ بينما $y_{\overrightarrow{AB}}\neq -y_{\overrightarrow{AC}}$ أي أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A ، B و C تعين مستويا.

ولدينا

$$x_A-y_A+z_A-1=2-1+0-1=0$$

$$x_B-y_B+z_B-1=1-2+1-1=0$$

$$x_C-y_C+z_C-1=3-3+1-1=0$$

إذن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة $x-y+z-1=0$ وبالتالي $x-y+z-1=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) تبيين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع وأن مساحته هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة:

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ ، $\overrightarrow{BC}(2;1;-1)$ ومنه

$$AB=\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(2)^2}=\sqrt{6}\,;\ AC=\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}=\sqrt{6}\,;$$
$$BC=\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

إذن $AB=AC=BC$ وعليه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

مساحته:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times h=\frac{1}{2}AB\times AB\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ ua$$

3) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ):

المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC) وبالتالي $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع توجيه له ($\vec{n}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)) وبما أنه يشمل النقطة $D(1;1;4)$ فإن:

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=1-t\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=4+t\end{cases}$$ تمثيل وسيطي له.

4) أ) تعيين إحداثيات النقطة E وحساب المسافة بين D والمستوي (ABC):

بما أن النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) و (Δ) عمودي على المستوي (ABC) و يشمل النقطة D فإن E هي نقطة تقاطع (ABC) و (Δ) أي إحداثياتها هي حل الجملة

$$\begin{cases} x = 1 + t \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ y = 1 - t \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ z = 4 + t \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ x - y + z - 1 = 0 \ldots (4) \end{cases}$$

بتعويض (1) ، (2) و(3) في (4) نجد:

$(1+t)-(1-t)+(4+t)-1=0$ أي $3t+3=0$ ومنه $t=-1$ وبالتعويض في التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد $E(0;2;3)$.

حساب المسافة بين D والمستوي (ABC):

المسافة بين D والمستوي (ABC) هي المسافة بين D و E (لأن E المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC))

$$d_{(D;(ABC))} = DE = \sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2+(3-4)^2} = \sqrt{3}$$

ب) تعيين مركزي سطحي الكرتين الذين يمسان المستوي (ABC) في النقطة E ونصف قطر كل منها $\sqrt{3}$

طريقة 01 : طريقة استنتاجية

بما أن السطحين يمسان المستوي (ABC) في النقطة E فإن مركزيهما ينتميان إلى المستقيم (Δ) ويبعدان بمسافة مساوية للنصف قطر السطحين أي مساوية لـ $\sqrt{3}$ ومما سبق نستنتج أن النقطة D هي مركز إحدى السطحين أما مركز السطح الآخر فنظير D بالنسبة إلى E

إحداثيات مركز السطح الآخر:

$$(2x_E - x_D; 2y_E - y_D; 2y_E - y_D) = (-1;3;2)$$

طريقة 02 :

بما أن السطحين يمسان المستوي (ABC) في النقطة E فإن مركزيهما ينتميان إلى المستقيم (Δ) أي إحداثياتهما من الشكل $(1+t;1-t;4+t)$ وبما أن نصف قطر السطحين $\sqrt{3}$ فإن قيم t تمثل حلول المعادلة:

$\frac{|(1+t)-(1-t)+(4+t)-1|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}} = \sqrt{3}$ ($\frac{|(1+t)-(1-t)+(4+t)-1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}}$ يمثل بعد أي نقطة من المستقيم (Δ) عن المستوي (ABC))

$$\frac{|(1+t)-(1-t)+(4+t)-1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}} = \sqrt{3}\,;\ \frac{|3t+3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,;\ |3t+3| = 3; 3t+3 = \pm 3\,;$$

$t \in \{0;-2\}$.

ومنه إحداثيات مركزي السطحين هي $(1;1;4)$ أي النقطة D و إحداثيات مركز السطح الآخر $(-1;3;2)$

5) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \times h = \frac{1}{3}S_{ABC} \times DE = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times DE = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}\, uv$$

حل التمرين الثاني:

I) تعيين العددين المركبين α و β

لدينا $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \;\dots\dots (1) \\ 2\alpha + \beta = -3 + 2i\sqrt{3} \;\dots\dots (2) \end{cases}$ بجمع المعادلتين نحصل

$4\alpha = -6 + 2i\sqrt{3}$ ومنه $\alpha = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتعويض في (1) نجد $2\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \beta = -3$ أي
$\beta = i\sqrt{3}$

$$(\alpha;\beta) = \left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; i\sqrt{3}\right)$$

(II

1) أ) كتابة z_A و z_C على الشكل الأسي ثم تعيين قيم العدد الطبيعي حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا

$$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

ولدينا $z_A = z_C . e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ ومنه $z_C = z_A . e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ أي $z_C = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)}$ ومنه $z_C = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

تعيين قيم العدد الطبيعي حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا

لدينا $z_A = z_C . e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ ومنه $\frac{z_A}{z_C} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ أي $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = e^{i\left(n\frac{\pi}{3}\right)}$

العدد $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي سالب معناه $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = \pi + 2\pi k$

$$n\frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi k \,;\, \frac{n}{3} = 1 + 2k \,;\, n = 3 + 6k \,;\, k \in \mathbb{N}$$

ب) التحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي .

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = 2e^{i\left(\frac{2015\times 5\pi}{6}\right)} + e^{i\left(\frac{1962\times(-5\pi)}{6}\right)} - e^{i\left(\frac{1435\times\pi}{2}\right)}$$
$$= 2e^{i\left(1679\pi + \frac{\pi}{6}\right)} + e^{i(-1635\pi)} - e^{i\left(717\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$
$$= 2\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right] + [\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$$
$$-\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right] + [-1 + 0] - [0 - i]$$
$$= -\sqrt{3} - 1 \in \mathbb{R}$$

2) أ) تحديد نسبة وزاوية التشابه المباشر S

بما أن S تشابه مباشر مركزه O و يحول D إلى A فإن نسبته تساوي $\left|\frac{z_A}{z_D}\right|$ و زاويته هي عمدة للعدد $\frac{z_A}{z_D}$.

لدينا

$$\frac{z_A}{z_D}=\frac{\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}{1+i}=\frac{\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

ومنه S تشابه مباشر نسبته $\frac{\sqrt{6}}{2}$ وزاويته $\frac{7\pi}{12}$.

ب) كتابة على الشكل الجبري $\frac{z_A}{z_D}$ واستنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\frac{z_A}{z_D}=\frac{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+i}\times\frac{2}{2}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{2+2i}\times\frac{2-2i}{2-2i}=\frac{-6+6i+i2\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{(2)^2+(2)^2}$$

$$=\frac{-6+2\sqrt{3}}{8}+i\frac{6+2\sqrt{3}}{8}$$

لدينا : $\arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right)=\frac{7\pi}{12}$ ، $\left|\frac{z_A}{z_D}\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ، $\mathrm{Re}\left(\frac{z_A}{z_D}\right)=\frac{-6+2\sqrt{3}}{8}$ ، $\mathrm{im}\left(\frac{z_A}{z_D}\right)=\frac{6+2\sqrt{3}}{8}$ ومنه:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\mathrm{Re}\left(\frac{z_A}{z_D}\right)}{\left|\frac{z_A}{z_D}\right|}=\frac{\frac{-6+2\sqrt{3}}{8}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{-6+2\sqrt{3}}{8}\times\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{-3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\mathrm{Im}\left(\frac{z_A}{z_D}\right)}{\left|\frac{z_A}{z_D}\right|}=\frac{\frac{6+2\sqrt{3}}{8}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{6+2\sqrt{3}}{8}\times\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12}$$

3) تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$

$$z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}=k\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}=ke^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{12}\right)}=ke^{i\left(\frac{10\pi}{12}\right)}=ke^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

ونلاحظ أن A تنتمي إلى مجموعة النقط M لأن $z_A=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ من أجل $k=\sqrt{3}$

ومنه مجموعة النقط M هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O ويشمل النقطة A . أي $M\in[OA)$

حل التمرين الثالث:

لدينا (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$

1) حساب u_1 ، u_2 و u_3

$$u_1 = (1 + u_0)e^{-2} - 1 = (1 + e^2 - 1)e^{-2} - 1 = e^0 - 1; u_1 = 0$$
$$u_2 = (1 + 0)e^{-2} - 1 = e^{-2} - 1; u_2 = e^{-2} - 1$$
$$u_3 = (1 + u_2)e^{-2} - 1 = (1 + e^{-2} - 1)e^{-2} - 1 = e^{-4} - 1; u_1 = e^{-4} - 1$$

2) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 + u_n > 0$

نستعمل البرهان بالتراجع للبرهان على $1 + u_n > 0$

من أجل $n = 0$: $1 + u_0 > 1 + e^2 - 1 = e^2 > 0$

نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي كيفي n أي $1 + u_n > 0$ ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$ أي $1 + u_{n+1} > 0$

لدينا

$$1 + u_{n+1} = 1 + (1 + u_n)e^{-2} - 1 = (1 + u_n)e^{-2}$$

ولدينا $1 + u_n > 0$ من فرض التراجع و $e^{-2} > 0$ ومنه $1 + u_{n+1} > 0$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع : $1 + u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n

3) تبيين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

لدينا $e^{-2} < 1$ بالضرب في المقدار الموجب تماما $1 + u_n$ نجد: $e^{-2}(1 + u_n) < 1 + u_n$ أي

$1 + u_{n+1} < 1 + u_n$ ومنه $u_{n+1} < u_n$ وعليه المتتالية (u_n) متناقصة.

نعم المتتالية متقاربة لأنها محدودة من الأسفل ($u_n > -1$) ومتناقصة.

4) $v_n = 3(1 + u_n)$

أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا $v_n = 3(1 + u_n)$ ومنه $v_{n+1} = 3(1 + u_{n+1})$ ولدينا $1 + u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2}$ ومنه

$v_{n+1} = 3(1 + u_n)e^{-2}$ أي $v_{n+1} = e^{-2}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-2}$ وحدها الأول

$$v_0 = 3(1 + u_0) = 3(1 + e^2 - 1) = 3e^2$$

ب) كتابة v_n و u_n بدلالة n وحساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-2}$ وحدها الأول $v_0 = 3e^2$ ومنه $v_n = v_0 \times q^n$

أي $v_n = 3e^2 \times (e^{-2})^n$ ، $v_n = 3(e^{-2})^{n-1}$ ، $v_n = 3e^{-2n+2}$

لدينا $v_n = 3(1+u_n)$ ومنه: $u_n = \frac{v_n - 3}{3}$ أي $u_n = \frac{3e^{-2n+2}-3}{3}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3e^{-2n+2}-3}{3} = -1$$

جـ)تبيين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

$$\begin{aligned}\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n &= \ln(v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n)\\ &= \ln(3e^{-2\times0+2} \times 3e^{-2\times1+2} \times \ldots \times 3e^{-2n+2}) = \ln(3^{n+1}e^{2+0+\cdots-2n+2})\\ &= \ln(3^{n+1}) + \ln\left(e^{\frac{(n+1)(2-2n+2)}{2}}\right) = (n+1)\ln 3 + \frac{(n+1)(4-2n+)}{2}\\ &= (n+1) + [\ln 3 + 2 - n]\end{aligned}$$

المجموع $(2+0+\cdots-2n+2)$ هو مجموع $(n+1)$ حد متتابع لمتتالية حسابية حدها الأول 2 وعبارة حدها العام يساوي $-2n+2$

حل التمرين الرابع:

I) 1) تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ)

من أجل $x \in]0;\alpha[$: (γ) يقع تحت (Δ) ، ومن أجل $x \in]\alpha;+\infty[$: (γ) يقع فوق (Δ) ، (γ) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيتين $(\alpha; -\alpha+3)$.

2) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$

لدينا $g(x) = x - 3 + \ln x = \ln x - (-x+3)$ ومنه إشارة $g(x)$ تستنتج من وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ)

من أجل $x \in]0;\alpha[$: $g(x) < 0$ ، ومن أجل $x \in]\alpha;+\infty[$: $g(x) > 0$ ، ومن أجل $x = \alpha$: $g(x) = 0$.

2) التحقق أن: $2,2 < \alpha < 2,3$

لدينا الدالة g مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ وبالأخص على المجال $[2,2;2,3]$ وتنعدم من أجل قيمة وحيدة α وبما أن $g(2,2) \approx -0,01$ و $g(2,3) \approx -0,13$ أي $g(2,2) \times g(2,3) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيمة المتوسطة $2,2 < \alpha < 2,3$

II. 1) حساب النهايات

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = +\infty ; \left[\lim_{\substack{x\to0\\>}} \left(1-\frac{1}{x}\right) = -\infty ; \lim_{\substack{x\to0\\>}} (\ln x - 2) = -\infty\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) ; \left[\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right) = 1 ; \lim_{x\to+\infty} (\ln x - 2) = +\infty\right]$$

2) إثبات أنه من أجل $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ وتشكيل جدول التغيرات:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{(\ln x - 2)}{x^2} + \frac{x-1}{x^2} = \frac{x-3+\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

تشكيل جدول التغيرات:

لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) تبيين أن $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ واستنتاج حصر له:

لدينا $f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha - 2)$

و لدينا $g(\alpha) = 0$ أي $\alpha - 3 + \ln\alpha = 0$ ومنه $\ln\alpha = -\alpha + 3$.

بتعويض بما تساويه $\ln\alpha$ في $f(\alpha)$ نجد:

$$f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(-\alpha + 3 - 2) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)[-(\alpha - 1)] = \frac{-(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

استنتاج حصر $f(\alpha)$:

$2,2 < \alpha < 2,3 \dots\dots\dots (1)$

$1,2 < \alpha - 1 < 1,3$

$1,2^2 < (\alpha - 1)^2 < 1,3^2 \dots\dots\dots\dots (2)$

من (1) و (2) نجد:

$$\frac{1,2^2}{2,3} < \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} < \frac{1,3^2}{2,2}$$

ومنه :

$$-\frac{1,3^2}{2,2} < -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} < -\frac{1,2^2}{2,3}$$

إذن:

$$-0,77 < f(\alpha) < -0,62$$

4) دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل:

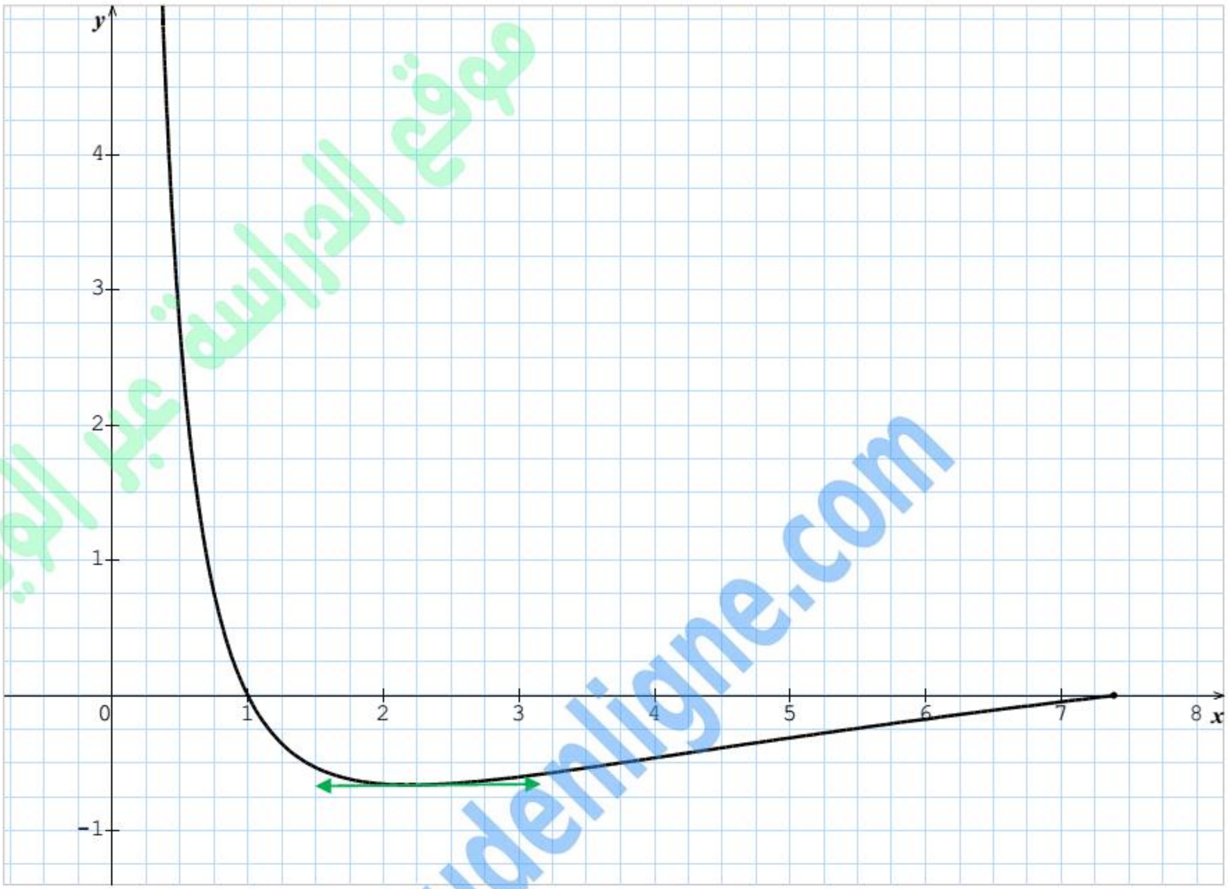
لمعرفة ذلك ندرس إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

لدينا $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ أي $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)(\ln x - 2)$ ومنه إشارة $f(x)$ من إشارة $(x-1)(\ln x - 2)$ لأن $x > 0$.

لدينا $\ln x - 2 = 0$ معناه $\ln x = 2$ أي $x = e^2$ ولدينا الدالة $x \mapsto \ln x - 2$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(\ln x - 2)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) يقع فوق محور الفواصل	(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الإحداثيتين	(C_f) يقع تحت محور الفواصل	(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الإحداثيتين	(C_f) يقع فوق محور الفواصل	

الإنشاء:



III. **1) تبيين أن منحني الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل :**

لدينا $F'(x) = f(x)$ وبما أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين هما e^2 و 1 فإن منحني الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين e^2 و 1.

2) تبيين $x \mapsto x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

$$(x\ln x - x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

ومنه $x \mapsto x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$

استنتاج عبارة الدالة F

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = \ln x - 2 - \frac{1}{x}\ln x + \frac{2}{x}$$

$$F(x) = x\ln x - x - 2x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2\ln x + c\,;$$

$$F(x) = -3x + \ln x\left(-\frac{1}{2}\ln x + x + 2\right) + c\,; F(1) = -3\,; c = 0$$

$$F(x) = -3x + \ln x\left(-\frac{1}{2}\ln x + x + 2\right)$$

حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول: الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل

1) صحيح

التعليل: لدينا $A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;-3;-4)$ ونلاحظ أن $y_{\overrightarrow{AB}}=0$ بينما $y_{\overrightarrow{AC}}\neq 0$ ومنه الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A ، B و C ليست في استقامية.

2) صحيح

التعليل:

$$2x_A+2y_A-z_A-11=2(2)+2(4)-(1)-11=0$$

$$2x_B+2y_B-z_B-11=2(0)+2(4)-(-3)-11=0$$

$$2x_C+2y_C-z_C-11=2(3)+2(1)-(-3)-11=0$$

إذن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة $2x+2y-z-11=0$ وبالتالي $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) خطأ

التعليل: لدينا $D(1;0;-2)$ و $E(3;2;-1)$ ومنه $\overrightarrow{DE}(2;2;-1)$ وليكن $\vec{n}(2;2;1)$ ومن الواضح أنهما غير مرتبطين خطيا ومنه المستقيم (DE) غير عمودي على المستوي (ABC). وبالتالي النقطة E ليست هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

4) خطأ

التعليل:

$$2x_D+2y_D-z_D-11=2(1)+2(0)-(-2)-11=-7\neq 0\ ; D\notin (ABC)$$

هناك مستو وحيد يشمل النقط A ، B و C هذا المستوي لا تنتمي إليه النقطة D ومنه المستقيمان (DC) و (AB) ليسا من نفس المستوي.

5) صحيح

التعليل:

لدينا $\begin{cases}1=2t-1;t=1\\0=t-1;t=1\\-2=-t-1;t=1\end{cases}$ ، $\begin{cases}3=2t-1;t=2\\1=t-1;t=2\\-3=-t-1;t=2\end{cases}$ ومنه إحداثيات النقطتين D و C تحقق التمثيل الوسيطي $\begin{cases}x=2t-1\\y=t-1\ ;t\in\mathbb{R}\\z=-t-1\end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (DC).

6) صحيح

التعليل: لدينا $A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)$ ، $\overrightarrow{AI}\left(-\frac{7}{5};0;-\frac{14}{5}\right)$
ونلاحظ أن $\overrightarrow{AI}=\frac{7}{10}\overrightarrow{AB}$ ومنه الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AI}$ مرتبطين خطيا أي أنه يوجد عددين حقيقين α و β بحيث تكون النقطة I مرجح الجملة $\{(A;\alpha),((B;\beta))\}$.

حل التمرين الثاني:

1) أ) كتابة z_B و z_C على الشكل الأسي

$$z_B=-\overline{z_A}=-2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)}=2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$
$$z_C=-(z_A+z_B)=-(z_A-\overline{z_A})=-2\,Im\,(z_A)=-2\left(2i\sin\frac{\pi}{6}\right)=-2i=2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

ت) استنتاج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) مع تحديد مركزها ونصف قطرها:

نلاحظ $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ ومنه النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها O ونصف قطرها $r=2$.

ج) انشاء الدائرة (γ) النقط A ، B و C

(γ) دائرة مركزها O ونصف قطرها $r=2$ النقطة A النقطة من الدائرة (γ) والتي ترتيبها $\left(2\times\sin\frac{\pi}{6}=1\right)$ وفاصلتها موجبة. أما النقطة فنظير النقطة A بالنسبة لمحور التراتيب. النقطة C نقطة من الدائرة (γ) التي فاصلتها معدومة.

2) أ التحقق أن $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$$\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=\frac{2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}-2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}{2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}-2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}}=\frac{(-\sqrt{3}+i)-(-2i)}{(-\sqrt{3}+i)-(\sqrt{3}+i)}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{-2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

ب) استنتاج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث

لدينا $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ ومنه $AB=BC$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{3}$ أي المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ولدينا $z_A+z_B+z_C=\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i-2i=0$ ومنه O مركز ثقل المثلث ABC

جـ) تعيين وإنشاء (E)مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z|=\left|z-\sqrt{3}-i\right|$

لدينا $|z|=\left|z-\sqrt{3}-i\right|$ ومنه $OM=AM$ إذن (E) هي محور القطعة $[OA]$.

3) أ) تعيين زاوية الدوران z الذي مركزه O ويحول C إلى A.

بما أن r دوران مركزه O و يحول C إلى A فإن زاويته هي عمدة للعدد $\frac{z_A}{z_C}$.

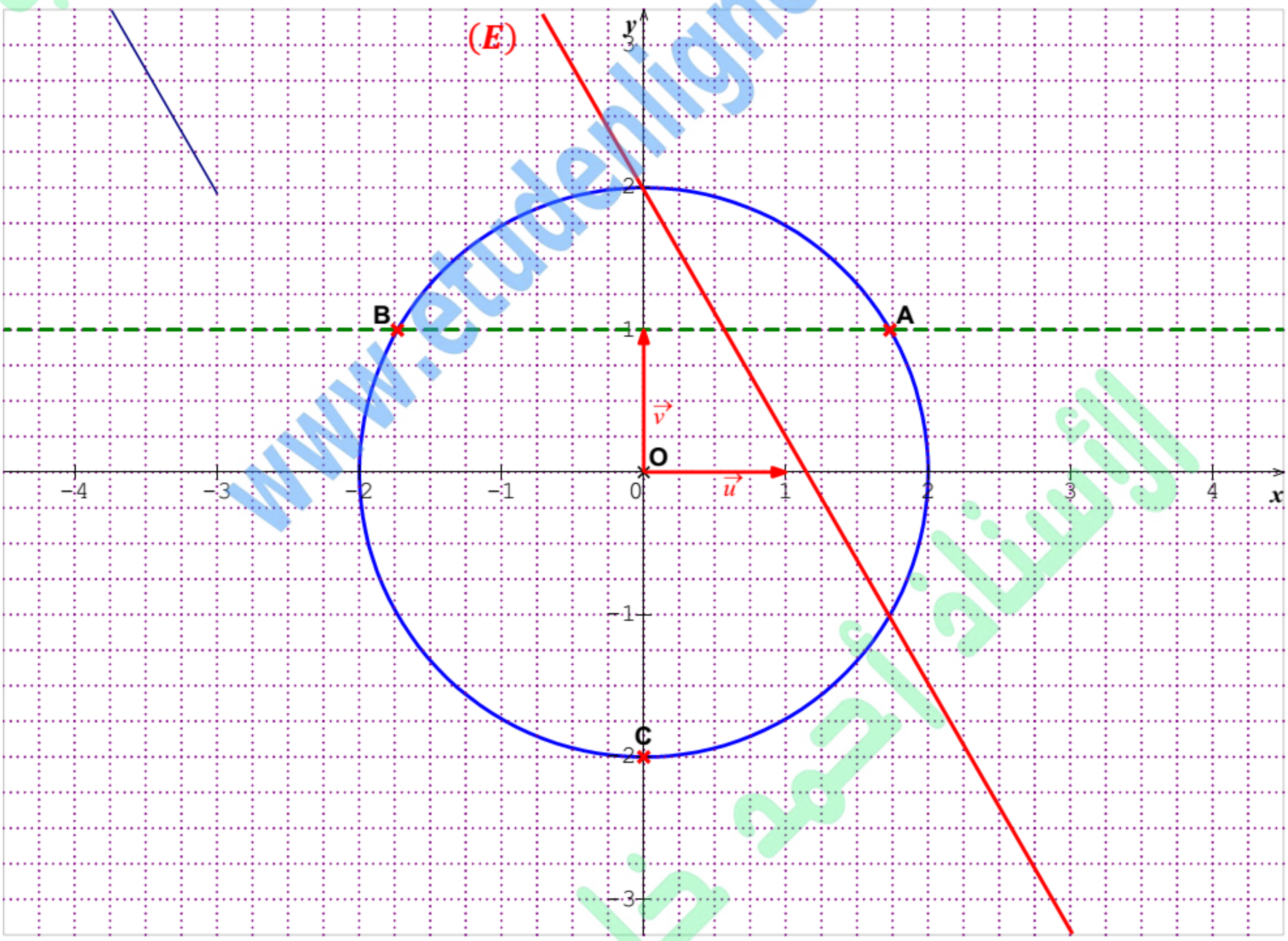
لدينا

$$\frac{z_A}{z_C}=\frac{2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

ومنه r دوران زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

ب) إثبات أن صورة المجموعة (E) هي محور القطعة $[OB]$

لدينا $r(O)=O$ و $r(A)=B$ (النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها O مركز ثقل المثلث ABC) ومنه صورة محور القطعة $[OA]$ المجموعة (E) هي محور القطعة $[OB]$.



حل التمرين الثالث:

I. 1) تعيين إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ حيث:

$$f'(x)=\frac{4(x+1)-(4x+1)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}>0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) :

لمعرفة ذلك ندرس إشارة $f(x)-x$ على المجال $[0;+\infty[$

لدينا

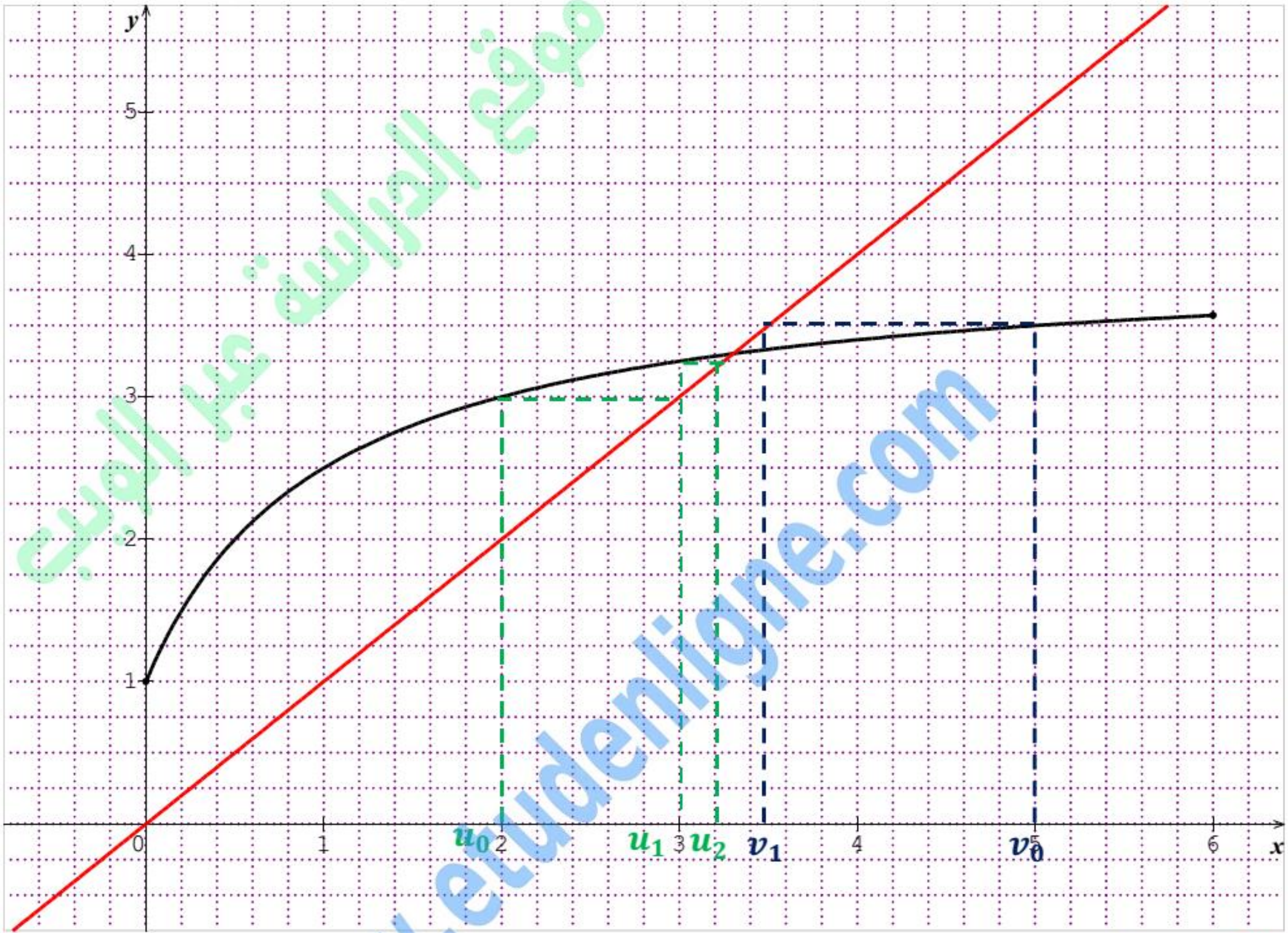
$$f(x)-x=\frac{4x+1}{x+1}-x=\frac{4x+1-x^2-x}{x+1}=\frac{-x^2+3x+1}{x+1}$$

ومنه إشارة $f(x)-x$ من إشارة $-x^2+3x+1$ لأن $x+1>0$.

$$\Delta=13\ ;x_1=\frac{3-\sqrt{13}}{2}<0;\ x_2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}=\alpha$$

x	0	α	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) يقع تحت المستقيم (D)	(C_f) يقطع المستقيم (D) النقطة ذات الإحداثيتين	(C_f) يقع فوق المستقيم (D)

II. 1) أ) الإنشاء



ب)التخمين:

من خلال إنشاء الحدود نلاحظ: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ومنه يمكن أن نخمن بأن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (D) القيمة (α).

نلاحظ: $v_0 > v_1 > v_2 > v_3$ ومنه يمكن أن نخمن بأن المتتالية (v_n) متزايدة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (D) القيمة (α).

2)أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n < \alpha$ وأن $\alpha \leq v_n < 5$

لدينا $2 \leq u_0 = 2 < \alpha$

نفرض أن $2 \leq u_n < \alpha$ ونبرهن أن $2 \leq u_{n+1} < \alpha$

لدينا من الفرض $2 \leq u_n < \alpha$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]2;\alpha[$ فإن $f(2) \leq f(u_n) < f(\alpha)$
أي: $2 \leq 3 \leq u_{n+1} < \alpha$

ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع $2 \leq u_n < \alpha$ من أجل كل عدد طبيعي n

* لدينا $\alpha \leq v_0 = 5 < 5$

نفرض أن $\alpha < v_n \leq 5$ ونبرهن أن $\alpha < v_{n+1} \leq 5$

لدينا من الفرض $\alpha < v_n \leq 5$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha;5]$ فإن $f(\alpha) < f(v_n) \leq f(5)$

أي: $\alpha < v_{n+1} \leq \frac{21}{6} \leq 5$

ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع $\alpha < v_n \leq 5$ من أجل كل عدد طبيعي n

ب)استنتاج اتجاه تغير كل كن المتتالتين (u_n) و (v_n):

لدينا من أجل $x \in [2;\alpha[$: $f(x) - x > 0$ ومنه من أجل $2 \leq u_n < \alpha$: $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ولدينا من أجل $x \in]\alpha;5]$: $f(x) - x < 0$ ومنه من أجل $\alpha < v_n \leq 5$: $v_{n+1} - v_n < 0$ أي المتتالية (v_n) متناقصة تماما $\mathbb{N}$.

التقارب:

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدود من الأعلى $(u_n < \alpha)$ فإن (u_n) متتالية متقاربة.

بما أن (v_n) متناقصة تماما ومحدود من الأسفل $(v_n > \alpha)$ فإن (v_n) متتالية متقاربة.

3)أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{4v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{4u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{4u_n v_n + 4v_n + u_n + 1 - 4u_n v_n - 4u_n - v_n - 1}{(u_n + 1)(v_n + 1)}$$
$$= \frac{3v_n - 3u_n}{(u_n + 1)(v_n + 1)} = \frac{3(v_n - u_n)}{(u_n + 1)(v_n + 1)}$$

ولدينا $u_n \geq 2$ و $v_n > \alpha \geq 2$ ومنه $(u_n + 1)(v_n + 1) \geq 9$ أي $\frac{3}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \frac{1}{3}$ وبالضرب في المقدار الموجب تماما $(v_n - u_n)$ (لأن $v_n > \alpha$ و $u_n < \alpha$) نجد: $\frac{3(v_n-u_n)}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

ب) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

لدينا $0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$ ومنه

$$0 < v_n - u_n \leq \frac{1}{3}(v_{n-1} - u_{n-1}) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$0 < v_{n-1} - u_{n-1} \leq \frac{1}{3}(v_{n-2} - u_{n-2}) \ldots\ldots (2)$$
$$0 < v_{n-2} - u_{n-2} \leq \frac{1}{3}(v_{n-3} - u_{n-3}) \ldots\ldots (3)$$

.

.

$$0 < v_1 - u_1 \leq \frac{1}{3}(v_0 - u_0) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (n)$$

بضرب المتباينات طرفا لطرف وبعد الاختزال نجد:

$$0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (5 - 2_0)$$

ومنه: $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

استنتاج أن $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

لدينا $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ و $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ومنه حسب مبرهنة النهاية بالمقارنة فإن $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

جـ) تحديد نهاية كل من (u_n) و (v_n):

بما أن (u_n) و (v_n) متقاربتين و لهما نفس النهاية فإن نهايتهما l هي حل المعادلة $f(x) = x$ أي $l = \alpha$

حل التمرين الرابع:

I. 1) دراسة اتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$g'(x) = -2 - 2e^{2x-2} < 0$$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2)تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ثم التحقق أن $0,36 < \alpha < 0,37$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - 2x - 2e^{2x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - 2x - 2e^{2x-2} \lim_{x\to+\infty}(2x-2)\left[\frac{1-2x}{2x-2} - \frac{e^{2x-2}}{2x-2}\right] = -\infty$$

لدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في على $\mathbb{R}$ ومنه لمعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.

التحقق أن $0,36 < \alpha < 0,37$:

$g(0,36) \approx 0,002$ و $g(0,37) \approx -0,02$ أي $g(0,36) \times g(0,37) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيمة المتوسطة $0,36 < \alpha < 0,37$

3) استنتاج إشارة $g(x)$

بما أن الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ وتنعدم عند α فإنه:

من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$: $g(x) > 0$ ، ومن أجل $x \in]\alpha; +\infty[$: $g(x) < 0$ ، ومن أجل $x = \alpha$: $g(x) = 0$.

.II $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$

1) أ) تبيين أنه من أجل كل من : $f'(x) = e^{2x+2}\text{g}(-x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2}(1 + 2x - e^{-2x-2})$$
$$= e^{2x+2}\left(1 - 2(-x) - e^{2(-x)-2}\right) = e^{2x+2}\text{g}(-x)$$

ب) استنتاج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-\alpha; +\infty[$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $\text{g}(-x)$

لدينا من أجل $x \in]-\infty; -\alpha[$: $(-x) \in]\alpha; +\infty[$ ومنه $\text{g}(-x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty; -\alpha[$

و من أجل $x \in]-\alpha; +\infty[$: $(-x) \in]-\infty; \alpha[$ ومنه $\text{g}(-x) > 0$ من أجل $x \in]-\alpha; +\infty[$

ومن أجل $x = -\alpha$: $\text{g}(-x) = 0$.

إذن: الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-\alpha; +\infty[$

2) حساب النهايات وتشكيل جدول التغيرات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x+2} - x + 1 = \lim_{x\to-\infty} x\left[e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{2x+2} - x + 1 = \lim_{x\to-\infty} x\left[e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x}\right] = +\infty$$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(-\alpha)$	↗ $+\infty$

3) حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x) + x - 1]$ وتفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) + x - 1] = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(2xe^{2x}) \times e^2 = 0$$

تفسير النتيجة هندسيا:

المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $-\infty$ معادلته $y = -x + 1$.

4) دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

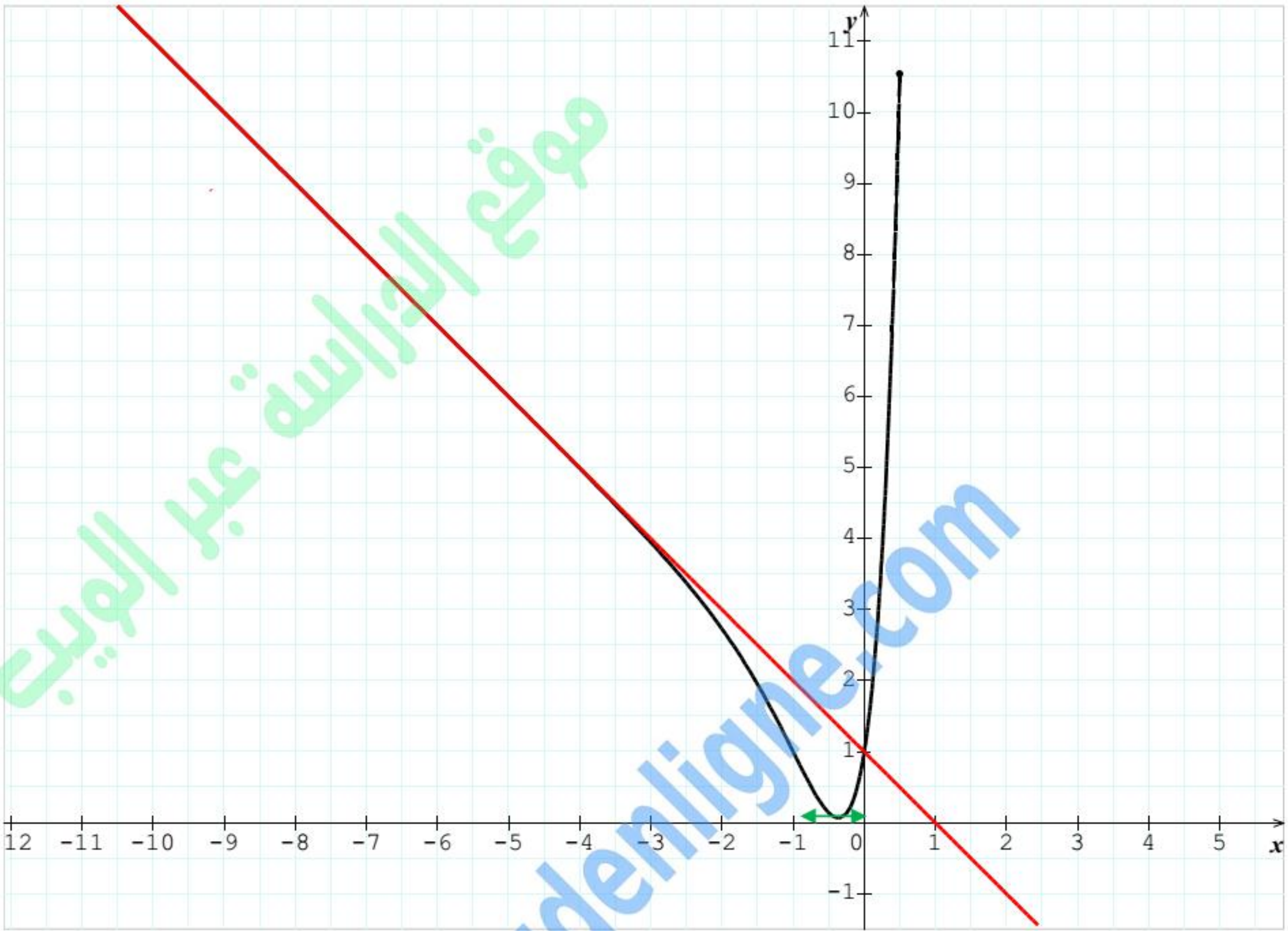
لمعرفة ذلك ندرس إشارة $f(x)+x-1$ على $\mathbb{R}$

$$f(x)+x-1=xe^{2x+2}$$

إشارة $f(x)+x-1$ من إشارة x لأن $e^{2x+2}>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)+x+1$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)	(C_f) يقطع المستقيم (Δ) النقطة ذات الإحداثيين	(C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)

5) الإنشاء



6) أ) التحقق أن $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$

$$2f(x) = 2xe^{2x+2} - 2x + 2$$

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1$$

$$f''(x) = 2e^{2x+2} + 2(e^{2x+2} + 2xe^{2x+2})$$

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = -3e^{2x+2} - 2x + 1$$

7) استنتاج دالة أصلية للدالة f

لدينا: $2f(x) + f'(x) - f''(x) = -3e^{2x+2} - 2x + 1$ ومنه

$$2F(x) + f(x) - f'(x) = -\frac{3}{2}e^{2x+2} - x^2 + x$$

$$2F(x) = -xe^{2x+2} + x - 1 + e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 - \frac{3}{2}e^{2x+2} - x^2 + x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}xe^{2x+2} - \frac{1}{4}e^{2x+2} - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$