تمرين محلول 1:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(1;2;-2)$، $B(2;3;-2)$ و $C(1;2;-2+\sqrt{2})$.

❶ احسب الجداءات السلمية التالية: $\vec{AB}.\vec{AC}$ ، $\vec{BA}.\vec{BC}$ و $\vec{CA}.\vec{CB}$.

❷ ماذا يمكن القول عن المستقيمين (AB) و (AC) ؟

❸ ما طبيعة المثلث ABC ؟

الحل:

❶ حساب $\vec{AB}.\vec{AC}$:

لدينا: $\vec{AB}(1;1;0)$ و $\vec{AC}(0;0;\sqrt{2})$

ومنه: $\vec{AB}.\vec{AC}=1\times0+1\times0+0\times\sqrt{2}=0$

○ حساب $\vec{BA}.\vec{BC}$:

لدينا: $\vec{BA}(-1;-1;0)$ و $\vec{BC}(-1;-1;\sqrt{2})$

ومنه: $\vec{BA}.\vec{BC}=(-1)(-1)+(-1)(-1)+0\times\sqrt{2}=2$

○ حساب $\vec{CA}.\vec{CB}$:

لدينا: $\vec{CA}(0;0;-\sqrt{2})$ و $\vec{CB}(1;1;-\sqrt{2})$

ومنه: $\vec{CA}.\vec{CB}=0\times1+0\times1+\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

❷ من السؤال السابق نستنتج أن المستقيمين (AB) و (AC) متعامدان.

❸ طبيعة المثلث ABC:

من السؤال السابق وجدنا أن $(AB)\perp(AC)$ ، ولدينا: $AB=\sqrt{2}$ و $AC=\sqrt{2}$

نستنتج أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين (يمكن أيضا استعمال مبرهنة فيثاغورث).

تمرين محلول 2:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(1;2;-2)$، $B(2;3;-2)$ و $C(3;2;-4)$.

عين العدد الحقيقي α بحيث يكون الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AB}+\alpha\vec{AC}$ متعامدين.

الحل:

تذكير: إذا كان $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ شعاعين من الفضاء فإن:

$[\vec{u}\perp\vec{v}]$ يكافئ $[xx'+yy'+zz'=0]$

لدينا: $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ و $\vec{AB}+\alpha\vec{AC}\begin{pmatrix}1+2\alpha\\1\\-2\alpha\end{pmatrix}$

ومنه: $1(1+2\alpha)+1\times1+0(-2\alpha)=0$

إذن: $\alpha=-1$

المستوي في الفضاء

○ تذكير:

نفرض في كل ما يأتي أن الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

✦ لكل مستو في الفضاء معادلة من الشكل: $ax+by+cz+d=0$.

✦ كل معادلة من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ هي معادلة مستو في الفضاء.

✦ المستوي ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$ عمودي على الشعاع $\vec{n}(a;b;c)$ يسمى $\vec{n}$ شعاعا ناظميا لهذا المستوي.

○ معادلة مستو يشمل نقطة معينة ويعامد شعاعا معلوما:

مثال: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1;2;-2)$ وعمودي على الشعاع $\vec{n}(2;1;-2)$

الطريقة الأولى:

بما أن $\vec{n}(2;1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) فإن معادلته من الشكل:

$2x+y-2z+d=0$

ولدينا: $A\in(P)$ يعني: $2\times1+1\times2-2(-2)+d=0$ ومنه: $d=-8$

إذن: معادلة المستوي (P) هي $2x+y-2z-8=0$

الطريقة الثانية:

$[M(x;y;z)\in(P)]$ يكافئ $[\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0]$

ومنه: $2(x-1)+1(y-2)-2(z+2)=0$ أي: $2x+y-2z-8=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي $2x+y-2z-8=0$

○ معادلة مستو يشمل ثلاث نقط ليست في استقامية:

مثال: $A(-1;3;2)$ ، $B(-4;0;1)$ و $C(1;2;-1)$ ثلاث نقط من الفضاء

كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):

✦ يمكن التحقق بسهولة أن النقط A ، B و C ليست على استقامية، أي أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن: $\overrightarrow{AB}(-3;-3;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(2;-1;-3)$ مع $\frac{-3}{2}\neq\frac{-3}{-1}$.

✦ إذا كان $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) فإن: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}\\ \overrightarrow{AC}\perp\vec{n}\end{cases}$

أي: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AC}.\vec{n}=0\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}-3a-3b-c=0\\ 2a-b-3c=0\end{cases}$ وبحل هذه الجملة مع فرض $c=9$ نحصل على $\vec{n}(8;-11;9)$

تكون عندئذ معادلة المستوي (ABC) من الشكل $8x-11y+9z+d=0$

ولدينا: $A\in(ABC)$ ومنه: $8(-1)-11\times3+9\times2+d=0$ أي: $d=23$

إذن: معادلة المستوي (ABC) هي $8x-11y+9z+23=0$

○ التمثيل الوسيطي لمستو في الفضاء:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

(P) المستوي المعيّن بالنقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ والشعاعين $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ و $\vec{u'}(\alpha';\beta';\gamma')$ ($\vec{u'}$ و $\vec{u}$ هما شعاعا توجيه للمستوي (P))

M نقطة كيفية من الفضاء إحداثياتها $(x;y;z)$.

تكون M نقطة من (P) إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان t و t' بحيث:

$\overrightarrow{AM}=t\vec{u}+t'\vec{u'}$ وبالمرور إلى إحداثيات الأشعة نحصل على الجملة الآتية :

$$\begin{cases}x-x_A=\alpha t+\alpha' t'\\ y-y_A=\beta t+\beta' t'\\ z-z_A=\gamma t+\gamma' t'\end{cases}$$ أو: $$\begin{cases}x=\alpha t+\alpha' t'+x_A\\ y=\beta t+\beta' t'+y_A\\ z=\gamma t+\gamma' t'+z_A\end{cases}\ ((t;t')\in\mathbb{R}^2)$$

تسمى الجملة السابقة تمثيلا وسيطيا للمستوي (P).

تمرين محلول 1:

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(2;0;0)$ ، $B(0;1;0)$ و $C(0;0;2)$.

❶ بيّن أن النقط A، B و C تعيّن مستويا (ABC).

❷ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC).

❸ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

الحل:

❶ تبيان أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا (ABC):

○ تعيّن النقط A ، B و C مستويا إذا وفقط إذا كانت ليست في استقامية.

○ النقط A ، B و C ليست في استقامية معناه: الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

○ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا يعني وجود عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{AC}=t\,\overrightarrow{AB}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;2)$ وبالتالي فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا (لأن مثلا: $\frac{-2}{-2}\neq\frac{0}{1}$).

إذن: النقط A ، B و C ليست في استقامية وبالتالي فهي تعيّن مستويا (ABC)

❷ كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (ABC):

تكون $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ نقطة من المستوي (ABC) إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان t و t' بحيث: $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}+t'\,\overrightarrow{AC}$ ومنه التمثيل الوسيطي الآتي:

$$\begin{cases} x=-2t-2t'+2 \\ y=t \\ z=2t' \end{cases} \quad \left((t;t')\in\mathbb{R}^2\right).$$

❸ استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):

لدينا: $\begin{cases} x=-2t-2t'+2 \\ y=t \\ z=2t' \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} t=y \\ t'=\frac{1}{2}z \\ x=-2y-z+2 \end{cases}$

إذن: معادلة للمستوي (ABC) هي: $x+2y+z-2=0$

○ المسافة بين نقطة ومستو:

المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث:

$$d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال: حساب بُعد النقطة $A(2;2;-4)$ عن المستوي (P) الذي معادلته:

$$2x+y-2z-8=0$$

$$d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2\times2+2-2\times(-4)-8|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{6}{3}=2$$

تمرين محلول 2:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$A(1;-1;0)$ ، $B(2;3;-4)$ و $C(-3;0;1)$ والشعاع $\vec{n}(8;15;17)$.

❶ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري للقطعة $[BC]$.

❷ تحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

❸ احسب $\overrightarrow{AB}.\vec{n}$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}$.

❹ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

الحل:

❶ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي المحوري للقطعة $[BC]$:

✦ مجموعة النقط M من المستوي حيث $BM = CM$ هي محور القطعة $[BC]$

✦ مجموعة النقط M من الفضاء حيث $BM = CM$ هي المستوي المحوري للقطعة $[BC]$.

✦ المسافة بين نقطتين: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

لتكن M نقطة كيفية من الفضاء إحداثياتها $(x\,;y\,;z)$.

لدينا: $BM = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2}$

و $CM = \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2}$

من المساواة $BM = CM$ ، وبعد التبسيط تصبح هذه المساواة على الشكل التالي:

$10x + 6y - 10z - 19 = 0$

إذن: معادلة المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ هي $10x + 6y - 10z - 19 = 0$

❷ التحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامية:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(1;4;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(-4;1;1)$ نستنتج أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا: $\frac{4}{1} \neq \frac{1}{-4}$ (لا يوجد عدد حقيقي k حيث: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$)

إذن: النقط A ، B و C ليست في استقامية.

❸ حساب $\overrightarrow{AB}.\vec{n}$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}$:

$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 1\times 8 + 4\times 15 - 4\times 17 = 68 - 68 = 0$ نستنتج أن: $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}.\vec{n} = -4\times 8 + 1\times 15 + 1\times 17 = 32 - 32 = 0$ نستنتج أن: $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

❹ استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):

بما أن النقط A ، B و C ليست في استقامية فهي تعيّن مستويا (ABC)،

وبما أن الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ فإن $\vec{n}(8;15;17)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

نستنتج أن معادلة المستوي (ABC) من الشكل: $8x + 15y + 17z + \alpha = 0$

ولدينا: $A(1;-1;0) \in (ABC)$ ومنه: $8 - 15 + 0 + \alpha = 0$ وبالتالي: $\alpha = 7$

إذن: معادلة المستوي (ABC) هي $8x + 15y + 17z + 7 = 0$

تمرين محلول 03

(جزء من تمرين بكالوريا 2009 الشعبة: رياضيات)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) حيث: $x + 2y - z - 2 = 0$ معادلة للمستوي (P_1)

و $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 5 + \alpha + \beta \end{cases} ; (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ تمثيل وسيطي للمستوي (P_2).

❶ اكتب معادلة للمستوي (P_2).

❷ عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n_1}$ للمستوي (P_1) وشعاعا ناظميا $\vec{n_2}$ للمستوي (P_2).

❸ بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان.

الحل :

❶ كتابة معادلة للمستوي (P_2):

لدينا: $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 5 + \alpha + \beta \end{cases}$ أي: $\begin{cases} y = 1 + \alpha \\ x = 1 + 2\alpha + \beta \\ z = 5 + \alpha + \beta \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} \alpha = y - 1 \\ x = 1 + 2(y-1) + \beta \\ z = 5 + y - 1 + \beta \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} \alpha = y - 1 \\ \beta = x - 2y + 1 \\ z = 4 + y + x - 2y + 1 \end{cases}$

إذن: معادلة للمستوي (P_2) هي: $x - y - z + 5 = 0$

❷ تعيين $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$:

معادلة للمستوي (P_1) هي: $x + 2y - z - 2 = 0$ ومنه: $\vec{n_1}(1;2;-1)$

معادلة للمستوي (P_2) هي: $x - y - z + 5 = 0$ ومنه: $\vec{n_2}(1;-1;-1)$

❸ تبيان أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان:

لدينا: $\vec{n_1}.\vec{n_2} = 1\times 1 + 2(-1) + (-1)(-1) = 2 - 2 = 0$ ومنه: $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$

إذن : المستويان (P_1) و (P_2) متعامدان.

المستقيم في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

(D) مستقيم يشمل النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و يوازي الشعاع غير المعدوم $\vec{u}(a;b;c)$.

M نقطة من الفضاء إحداثياتها $(x;y;z)$.

تكون M نقطة من (D) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث: $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

ومنه نستنتج الجملة التالية:

$$\begin{cases} x-x_A=at \\ y-y_A=bt \\ z-z_A=ct \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}) \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

تسمى الجملة السابقة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

تمرين محلول 1:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقطتين $A(-1;3;2)$ و $B(1;2;-1)$.

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).
2. عين إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي $(O;\vec{i},\vec{k})$.

الحل:

1. كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (AB):

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (AB) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث: $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$. ولدينا: $\overrightarrow{AB}(2;-1;-3)$ ومنه التمثيل الوسيطي الآتي:

$$\begin{cases} x+1=2t \\ y-3=-t \\ z-2=-3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}) \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} x=-1+2t \\ y=3-t \\ z=2-3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

2. إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي $(O;\vec{i},\vec{k})$:

معادلة المستوي $(O;\vec{i},\vec{k})$ هي $y=0$ ومنه: $3-t=0$ وعليه: $t=3$

نستنتج أن:
$$\begin{cases} x=-1+2\times3=5 \\ y=3 \\ z=2-3\times3=-7 \end{cases}$$

إذن: يتقاطع المستقيم (AB) مع المستوي $(O;\vec{i},\vec{k})$ في النقطة $H(5;3;-7)$.

تمرين محلول 2:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(0;1;-1)$، $B(4;-1;-3)$ و $C(-1;-1;-1)$.

اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من:

1. المستقيم (AB).
2. القطعة $[AC]$.
3. نصف المستقيم $[BC)$.

الحل:

1. كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (AB):

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (AB) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t_1 بحيث: $\overrightarrow{AM}=t_1\overrightarrow{AB}$.

ولدينا: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}$ ومنه التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=4t_1 \\ y=1-2t_1 \\ z=-1-2t_1 \end{cases} \quad (t_1\in\mathbb{R})$

2. كتابة تمثيل وسيطي للقطعة $[AC]$:

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من القطعة $[AC]$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t_2 من المجال $[0;1]$ بحيث: $\overrightarrow{AM}=t_2\overrightarrow{AC}$.

ولدينا: $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ ومنه التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=-t_2 \\ y=1-2t_2 \\ z=-1 \end{cases} \quad (t_2\in[0;1])$

● كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (BC):

تكون $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من نصف المستقيم $[BC]$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t_3 من المجال $[0\,;+\infty[$ بحيث: $\overrightarrow{BM}=t_3\overrightarrow{BC}$.

ولدينا: $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\0\\2\end{pmatrix}$ ومنه التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases}x=4-5t_3\\y=-1\\z=-3+2t_3\end{cases}$ $(t_3\in[0\,;+\infty[)$

تمرين محلول 3:

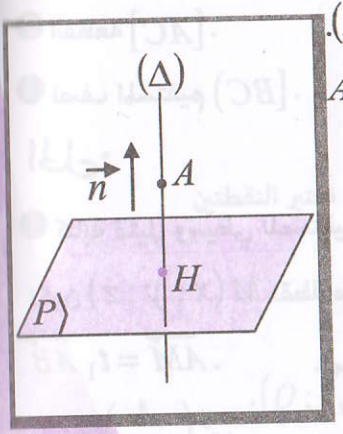
في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقطة $A(1\,;-2\,;1)$ والمستوي (P) الذي معادلته: $x+2y-z+2=0$

أوجد إحداثيات المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P).

الحل:

○ ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة A وعمودي على (P).

البحث عن إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) يؤول إلى تعيين إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (P).



$\vec{n}(1\,;2\,;-1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) وبالتالي:

فهو شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

✦ كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ):

تكون $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث:

$\overrightarrow{AM}=t\vec{n}$. ومنه التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=1-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

✦ إحداثيات النقطة H:

لدينا: $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=1-t\\x+2y-z+2=0\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=1-t\\(1+t)+2(2+2t)-(1-t)+2=0\end{cases}$

أي: $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=1-t\\6t+6=0\end{cases}$ نستنتج أن: $t=-1$ وعليه فإن: $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=2\end{cases}$

إذن: المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) هي النقطة $H(0\,;0\,;2)$

تمرين محلول 4:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. m عدد حقيقي.

(P_m) مجموعة النقط $M(x\,;y\,;z)$ من الفضاء حيث:

$$mx+y+(m-1)z+2m+1=0$$

❶ بيّن أن (P_m) مستو يطلب تعيين شعاعا ناظميا له.

❷ أثبت أنه مهما يكن الوسيط الحقيقي m فإن جميع المستويات (P_m) تشمل مستقيما ثابتا (Δ) يطلب إعطاء ثلاثية من وُسطاء توجيهه.

الحل:

❶ إثبات أن (P_m) مستو:

تذكير: كل معادلة من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$ هي معادلة مستو في الفضاء و $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ شعاع ناظمي له.

بما أن الثلاثية $(m\,;1\,;m-1)$ لا تنعدم في آن واحد فإن (P_m) مستو،

و $\vec{n}(m\,;1\,;m-1)$ شعاع ناظمي له.

❷ إثبات أن جميع المستويات (P_m) تشمل مستقيما ثابتا (Δ):

لدينا: $mx+y+(m-1)z+2m+1=0$ ومنه: $mx+y+mz-z+2m+1=0$

أي: $m(x+z+2)+y-z+1=0$ نستنتج أن: $\begin{cases}x+z+2=0\\y-z+1=0\end{cases}$

إذن: مهما يكن الوسيط الحقيقي m فإن جميع المستويات (P_m) تشمل مستقيما ثابتا (Δ) معرف بالجملة. $\begin{cases}x+z+2=0\\y-z+1=0\end{cases}$

✦ كتابة ثلاثية من وُسطاء توجيه (Δ):

❖ طريقة أولى:

لدينا: $\begin{cases} x+z+2=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x=-z-2 \\ y=z-1 \end{cases}$ أخيرا: $\begin{cases} x=-z-2 \\ y=z-1 \\ z=z \end{cases}$

وبفرض $z=t$ نحصل على التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=-t-2 \\ y=t-1 \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

❖ طريقة ثانية:

لدينا: $\begin{cases} x+z+2=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} z=-x-2 \\ y=z-1=-x-3 \end{cases}$ أخيرا: $\begin{cases} x=x \\ y=-x-3 \\ z=-x-2 \end{cases}$

وبفرض $x=t'$ نحصل على التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=t' \\ y=-t'-3 \\ z=-t'-2 \end{cases} \quad (t'\in\mathbb{R})$

❖ طريقة ثالثة:

لدينا: $\begin{cases} x+z+2=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x=-z-2 \\ z=y+1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x=-(y+1)-2 \\ z=y+1 \end{cases}$

أخيرا: $\begin{cases} x=-y-3 \\ y=y \\ z=y+1 \end{cases}$

وبفرض $y=t''$ نحصل على التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=-t''-3 \\ y=t'' \\ z=t''+1 \end{cases} \quad (t''\in\mathbb{R})$

المرجع

○ مرجع ثلاث نقط:

لتكن A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي (أو من الفضاء) و α ، β ، γ ثلاثة أعداد حقيقية. إذا كان $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

تسمى النقطة G مرجح النقط A ، B وَ C مرفقة بالمعاملات α ، β وَ γ على الترتيب.

ملاحظة:

تسمى أيضا النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$.

حالة خاصة:

إذا كان $\alpha=\beta=\gamma$ تسمى النقطة G مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B وَ C.

تكون عندئذ النقطة G معرفة بالمساواة: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

وإذا كانت النقط A ، B وَ C ليست على استقامة واحدة تسمي G أيضا مركز ثقل المثلث ABC.

○ خواص مرجح ثلاث نقط:

✦ إذا كان k عددا حقيقيا غير معدوم وكانت النقطة G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ تكون G أيضا مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$

✦ إذا عوضنا نقطتين مثقلتين (A,α) و (B,β) مع $\alpha+\beta\neq 0$ بمرجحيهما D مرفقة بالمعامل $\alpha+\beta$ ، فإن مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ هو أيضا مرجح الجملة المثقلة $\{(D,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$.

✦ إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ ، فإنه

من أجل كل نقطة M من المستوي (أو من الفضاء):

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

(تسمى هذه الخاصة: الخاصة الأساسية)

✦ إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ فإن المرجح غير موجود و $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$

هو شعاع ثابت.

○ إحداثيات مرجح ثلاث نقط:

المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B وَ C

المرفقة بالمعاملات α ، β وَ γ على الترتيب.

نضع: $A(x_A,y_A)$ ، $B(x_B,y_B)$ ، $C(x_C,y_C)$ وَ $G(x_G,y_G)$

من أجل كل نقطة M ، لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

ومن أجل $M=O$ نحصل على: $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{OG}$

ومنه: $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}$

نستنتج أن: $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ وَ $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

ملاحظة:

في الفضاء المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ،إذا كانت $G(x_G;y_G;z_G)$

فإن $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ ، $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ و $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

○ مرجح n نقطة:

إذا كانت: A_1 ، A_2 ، .... A_n n نقطة من المستوي (أو من الفضاء) وكان:

α_1 ، α_2 ، .... α_n n عددا حقيقيا حيث $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\neq 0$ فإنه توجد

نقطة وحيدة G تحقق: $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$

تسمى النقطة G مرجح النقط A_1 ، A_2 ، .... A_n مرفقة بالمعاملات:

α_1 ، α_2 ، .... α_n على الترتيب.

ملاحظة:

تسمى أيضا G مرجح الجملة المثقلة $\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);...;(A_n,\alpha_n)\}$.

حالة خاصة:

إذا كانت كل المعاملات α_1 ، α_2 ، .... α_n متساوية تسمى النقطة G مركز

المسافات المتساوية للنقط A_1 ، A_2 ، .... A_n . تكون عندئذ النقطة G معرفة بالمساواة:

$$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$$

ملاحظة:

الخواص المعروفة في مرجح ثلاث نقط تبقى صحيحة وتمدد إلى n نقطة .

الخاصة الأساسية:

إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);...;(A_n,\alpha_n)\}$

فإنه من أجل كل نقطة M من المستوي (أو من الفضاء):

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\overrightarrow{MG}$$

○ التمييز بالمرجح:

✦ المستقيم في الفضاء: A وَ B نقطتان متمايزتان.

- المستقيم (AB) هو مجموعة النقط M حيث: $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ ، t يمسح $\mathbb{R}$.
- المستقيم (AB) هو مجموعة النقط M التي هي مراجيح للجملة المثقلة:

$\{(A,1-t);(B,t)\}$ مع t عدد حقيقي كيفي.

- المستقيم (AB) هو مجموعة مراجيح للنقطتين A و B.

✦ القطعة المستقيمة في الفضاء: A و B نقطتان متمايزتان.

- القطعة $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث: $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ ، t يمسح $[0;1]$.

- القطعة $[AB]$ هي مجموعة النقط M التي هي مراجيح للجملة المثقلة:

$\{(A,1-t);(B,t)\}$ مع t عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0;1]$.

- القطعة $[AB]$ هي مجموعة مراجيح للنقطتين A و B مرفقتين بمعاملين من نفس الإشارة.

✦ المستوي في الفضاء: A ، B وَ C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

- المستوي (ABC) هو مجموعة النقط M حيث: $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ، x و y عددان حقيقيان كيفيان.

- المستوي (ABC) هو مجموعة النقط M التي هي مراجيح للجملة المثقلة:

$\{(A,1-x-y);(B,x);(C,y)\}$ مع x و y عددان حقيقيان كيفيان.

- المستوي (ABC) هو مجموعة مراجيح للنقط A ، B وَ C.

- داخل المثلث (ABC) هو مجموعة مراجيح للنقط A ، B وَ C مرفقة بمعاملات من نفس الإشارة .

تمرين محلول 1:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$A(-1;1;2)$ ، $B(2;-3;0)$ و $C(0;2;1)$.

❶ عيّن إحداثيات النقطة I مركز ثقل المثلث ABC.

❷ عيّن إحداثيات النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-1);(B,1);(C,2)\}$

❸ عيّن إحداثيات النقطة D بحيث تكون النقطة O مركزا للمسافات المتساوية للنقط A ، B و D.

❹ عيّن المجموعة (E) للنقط M من الفضاء حيث:

$$\|-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| \quad \dots(1)$$

الحل:

تذكير: إذا كانت $G(x_G\,;y_G\,;z_G)$ مرجح الجملة المثقلة: $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ فإن: $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}$ ومنه :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\ ،\ y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\ \text{و}\ z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

❶ إحداثيات النقطة I :

I معرفة بالعلاقة: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ ومنه: $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

نستنتج أن: $x_I=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)=\frac{1}{3}$ ، $y_I=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)=0$

و $z_I=\frac{1}{3}(z_A+z_B+z_C)=1$. إذن: $I\left(\frac{1}{3};0;1\right)$

❷ إحداثيات النقطة G:

G معرفة بالعلاقة: $-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

أو بالعلاقة: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC})$

نستنتج أن: $x_G=\frac{1}{2}(-x_A+x_B+2x_C)=\frac{3}{2}$ ، $y_G=\frac{1}{2}(-y_A+y_B+2y_C)=0$

و $z_G=\frac{1}{2}(-z_A+z_B+2z_C)=0$. إذن: $G\left(\frac{3}{2};0;0\right)$

❸ إحداثيات النقطة D:

O مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B و D يعني: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

ومنه: $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

وبالتالي: $x_D=-x_A-x_B=-1$ ، $y_D=-y_A-y_B=2$ و $z_D=-z_A-z_B=-2$

إذن: $D(-1;2;-2)$

❹ تعيين المجموعة (E):

تذكير: مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ هي سطح الكرة التي قطرها $[AB]$.

لدينا: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$ و $-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MI}$

ومنه: (1) تكافئ $\|2\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MI}\|$ أي: $4MG^2-9MI^2=0$

وباستعمال التحليل نجد: $(2\overrightarrow{MG}-3\overrightarrow{MI})(2\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{MI})=0$ ... (2)

لتكن G_1 مرجح الجملة المثقلة $\{(G,2);(I,-3)\}$ و G_2 مرجح الجملة المثقلة $\{(G,2);(I,3)\}$. تصبح العلاقة (2) كما يلي: $(-\overrightarrow{MG_1})(5\overrightarrow{MG_2})=0$

ومنه: $\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2}=0$

إذن: المجموعة (E) هي سطح الكرة ذات القطر $[G_1G_2]$.

تمرين محلول 2:

A ، B و C ثلاث نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة و λ عدد حقيقي كيفي.

❶ أثبت وجود نقطة G_λ هي مرجح للجملة المثقلة التالية:

$\{(A,3);(B,\lambda-2);(C,-\lambda+1)\}$

❷ أثبت أن: $\overrightarrow{AG_\lambda}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

❸ استنتج مجموعة النقط G_λ عندما يمسح العدد λ المجموعة $\mathbb{R}$.

الحل:

❶ إثبات وجود النقطة G_λ:

لدينا: $3+(\lambda-2)+(-\lambda+1)=2$

من أجل كل λ من $\mathbb{R}$ ، مجموع المعاملات غير معدوم. إذن: النقطة G_λ موجودة

❷ إثبات أن $\overrightarrow{AG_\lambda}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$:

من أجل كل نقطة M من الفضاء وباستعمال الخاصة الأساسية للمرجح فإن:

$3\overrightarrow{MA}+(\lambda-2)\overrightarrow{MB}+(-\lambda+1)\overrightarrow{MC}=(3+\lambda-2-\lambda+1)\overrightarrow{MG_\lambda}=2\overrightarrow{MG_\lambda}$

وبفرض $M=A$ تصبح العلاقة السابقة كما يلي:

$(\lambda-2)\overrightarrow{AB}+(-\lambda+1)\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AG_\lambda}$

ومنه: $(\lambda-2)(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+(-\lambda+1)\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AG_\lambda}$

وبالتالي: $\overrightarrow{AG_\lambda}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{CB}-(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

إذن: $\overrightarrow{AG_\lambda}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

❸ استنتاج مجموعة النقط G_λ عندما يمسح العدد λ المجموعة $\mathbb{R}$:

لدينا: $\overrightarrow{AG_\lambda}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ وبوضع: $\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

وإدخال النقطة E بين النقطتين A و G_λ نحصل على: $\overrightarrow{EG_\lambda}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{CB}$

عندما يمسح العدد λ المجموعة $\mathbb{R}$ فإن العدد $\frac{\lambda}{2}$ يمسح أيضا المجموعة $\mathbb{R}$، نستنتج أن مجموعة النقط G_λ عندما يمسح العدد λ المجموعة $\mathbb{R}$ هي المستقيم الذي يشمل النقطة E و موجه بالشعاع $\overrightarrow{CB}$.

تمرين محلول 3:

A و B نقطتان متمايزتان من الفضاء.

M مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k);(B,1-k)\}$.

ما هي مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

❶ k يمسح $\mathbb{R}$.

❷ k يمسح المجال $[0;1]$.

❸ k يمسح المجال $[0;+\infty[$.

بما أن M مرجح للجملة المثقلة $\{(A,k);(B,1-k)\}$ فإنها معرفة بالعلاقة:

$k\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ وباستعمال علاقة شال وإدخال A بين M و B

نجد: $\overrightarrow{AM}=(1-k)\overrightarrow{AB}$

❶ k يمسح $\mathbb{R}$: في هذه الحالة المجموعة هي المستقيم (AB).

❷ k يمسح المجال $[0;1]$: في هذه الحالة المجموعة هي القطعة $[AB]$.

❸ k يمسح المجال $]0;+\infty[$: في هذه الحالة المجموعة هي نصف المستقيم $[AB)$.

تمرين محلول 4:

A ، B وَ C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من الفضاء.

عين مجموعة مراجيح النقط المثقلة $(A;-1)$، $(B;2)$ و $(C;k)$ عندما:

k يمسح $\mathbb{R}-\{-1\}$.

الحل:

لتكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-1);(B,2);(C;k)\}$.

من أجل كل نقطة M من الفضاء وباستعمال الخاصة الأساسية للمرجح فإن:

$-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MC}=(-1+2+k)\overrightarrow{MG}=(k+1)\overrightarrow{MG}$

وبفرض $M=A$ تصبح العلاقة السابقة كما يلي: $2\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}=(k+1)\overrightarrow{AG}$

ومنه: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$

إذن: مجموعة مراجيح النقط المثقلة $(A;-1)$، $(B;2)$ و $(C;k)$ عندما:

يمسح العدد k المجموعة $\mathbb{R}-\{-1\}$ هي المستوي (ABC).

سطح الكرة

سطح الكرة:

✦ سطح الكرة التي مركزها النقطة Ω ونصف قطرها r هي مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\Omega M=r$

✦ معادلة سطح الكرة التي مركزها النقطة $\Omega(x_0\,;y_0\,;z_0)$ ونصف قطرها r هي:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

✦ مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ هي سطح الكرة التي قطرها $[AB]$.

تقاطع مستوي وسطح كرة:

ليكن (P) المستوي الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$، (S) سطح الكرة التي مركزها النقطة Ω ونصف قطرها R.

لدراسة تقاطع (P) و(S) نقوم بحساب $d=d(\Omega;(p))$ بُعد النقطة Ω عن المستوي (P) ونميّز ثلاث حالات:

✦ إذا كان $d>R$ فإن (P) يقع خارج (S) أي (P) لا يقطع (S).

✦ إذا كان $d=R$ فإن (P) و (S) يتقاطعان في نقطة واحدة H ، ونقول في هذه الحالة إن المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S) في النقطة H (H هي المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوي (P)).

✦ إذا كان $d<R$ فإن المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة (c) محتواة في (P) ومركزها النقطة H المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوي (P)، ونصف قطرها r حيث $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

وإذا كانت $\Omega\in(P)$ فإن المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) وفق الدائرة الكبرى (c) التي مركزها النقطة Ω ونصف قطرها R ((c) محتواة في (P))

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقطتين $A(3;-5;1)$ و $B(1;-3;7)$.

1) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) ذات القطر $[AB]$.

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) المماس لسطح الكرة (S) في النقطة A.

الحل:

1) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) ذات القطر $[AB]$:

تذكير: مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ هي سطح الكرة التي قطرها $[AB]$.

إذا كانت $(x;y;z)$ إحداثيات النقطة M فإن $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+5\\z-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y+3\\z-7\end{pmatrix}$

ومنه: $(x-3)(x-1)+(y+5)(y+3)+(z-1)(z-7)=0$

وبعد التبسيط نحصل على المعادلة: $x^2+y^2+z^2-4x+8y-8z+25=0$

إذن: معادلة سطح الكرة (S) هي $x^2+y^2+z^2-4x+8y-8z+25=0$

طريقة أخرى: يمكن حساب r نصف قطر سطح الكرة (S) حيث $r=\frac{AB}{2}$

وتعيين Ω مركز سطح الكرة (S) حيث Ω هي منتصف القطعة $[AB]$

وبالتالي الحصول على المعادلة: $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-4)^2=(\sqrt{11})^2$

هذه الأخيرة تُبسط إلى الشكل: $x^2+y^2+z^2-4x+8y-8z+25=0$

1) كتابة معادلة للمستوي (P) المماس لسطح الكرة (S) في النقطة A:

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(P)$ يعني $\overrightarrow{A\Omega}\perp\overrightarrow{AM}$ ومنه: $\overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0$

لدينا: $\overrightarrow{A\Omega}(-1;1;3)$ و $\overrightarrow{AM}(x-3;\ y+5;z-1)$

ومنه: $-1\times(x-3)+1\times(y+5)+3\times(z-1)=0$

إذن: معادلة للمستوي (P) هي $-x+y+3z+5=0$

تمرين محلول 2:

(Bac France 2001)

A، B و C ثلاث نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة و k عدد حقيقي من المجال $[-1;1]$. نسمي G_k مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k^2+1);(B,k);(C,-k)\}$

1) مثل النقط A، B، C، I منتصف $[BC]$ وأنشئ النقطتين G_1 و G_{-1}.

2) أ- أثبت أنه من أجل كل k من المجال $[-1;1]$، لدينا: $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

ب- أنشئ جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[-1;1]$ بـ: $f(x)=-\frac{x}{x^2+1}$

جـ- استنتج مجموعة النقط G_k عندما يمسح العدد k المجال $[-1;1]$.

3) عيّن المجموعة (E) للنقط M من الفضاء حيث:

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| \quad \dots (1)$$

4) عيّن المجموعة (F) للنقط M من الفضاء حيث:

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| \quad \dots (2)$$

5) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. إحداثيات النقط A، B و C هي على الترتيب: $(0;0;2)$، $(-1;2;1)$ و $(-1;2;5)$.

أ- احسب إحداثيات G_1 و G_{-1}.

ب- بيّن أن (E) و (F) تتقاطعان وفق دائرة (c) يطلب تعيين نصف قطرها.

الحل:

1) النقطة G_k موجودة لأن: $k^2+1+k-k=k^2+1$ و $k^2+1\neq 0$

النقطة G_k معرفة بالعلاقة: $(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}+k\overrightarrow{G_kB}-k\overrightarrow{G_kC}=\vec{0}$

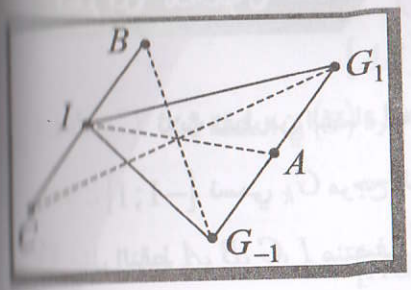
ونعلم من خواص المرجح أنه من أجل كل نقطة M من الفضاء:

$(k^2+1)\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}=$

✦ من أجل $k=1$ تصبح العلاقة السابقة كما يلي: $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_1}$

في الحالة الخاصة $M=A$ تكتب العلاقة الأخيرة: $2\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AG_1}$

وأخيرا: $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



✦ من أجل $k=-1$ وباتباع نفس الطريقة السابقة نجد:

$\overrightarrow{AG_{-1}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

❷ أ- إثبات أنه من أجل كل k من المجال $[-1;1]$ ، لدينا: $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

من العلاقة: $(k^2+1)\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}=(k^2+1)\overrightarrow{MG_K}$

وبفرض $M=A$ نحصل على: $k\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}=(k^2+1)\overrightarrow{AG_K}$

ومنه: $(k^2+1)\overrightarrow{AG_K}=k\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{CA}+k\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=k\overrightarrow{CB}$

وأخيرا: $\overrightarrow{AG_K}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

ب- جدول تغيرات f : من أجل كل x من المجال $[-1;1]$: $f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

وبما أنه من أجل كل x من المجال $[-1;1]$ ، $x^2-1\le 0$ و $(x^2+1)^2>0$

نستنتج أنه من أجل كل x من المجال $[-1;1]$ ، $f'(x)\le 0$

وبالتالي فإن الدالة f متناقصة على المجال $[-1;1]$ ، وعليه فإن جدول تغيراتها هو

x	-1		1
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$

لاستنتاج مجموعة النقط G_k عندما يمسح العدد k المجال $[-1;1]$:

نوظف $\frac{-k}{k^2+1}=f(k)$ ، وحسب جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-1;1]$

نستنتج أنه عندما يمسح k المجال $[-1;1]$ فإن $f(k)$ يمسح المجال $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

لكن $\overrightarrow{AG_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AG_{-1}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ نستنتج أن مجموعة النقط G_k عندما يمسح العدد k المجال $[-1;1]$ هي القطعة $[G_{-1}G_1]$.

❸ تعيين المجموعة (E) :

تذكير:

مجموعة النقط M من المستوي حيث $MA=MB$ هي محور القطعة $[AB]$

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $MA=MB$ هي المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

لدينا: $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(2+1-1)\overrightarrow{MG_1}=2\overrightarrow{MG_1}$

ولدينا: $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(2-1+1)\overrightarrow{MG_{-1}}=2\overrightarrow{MG_{-1}}$

ومنه: (1) تكافئ $\|2\overrightarrow{MG_1}\|=\|2\overrightarrow{MG_{-1}}\|$ أي: $MG_1=MG_{-1}$

إذن: المجموعة (E) هي المستوي المحوري للقطعة $[G_{-1}G_1]$.

❹ تعيين المجموعة (F) : للنقط M من الفضاء حيث:

تذكير:

✦ مجموعة النقط M من المستوي حيث $AM=BC$ هي الدائرة التي مركزها النقطة A ونصف قطرها BC.

✦ مجموعة النقط M من الفضاء حيث $AM=BC$ هي سطح كرة التي مركزها النقطة A ونصف قطرها BC.

لدينا: $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(2+1-1)\overrightarrow{MG_1}=2\overrightarrow{MG_1}$

ولدينا: $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})$

$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=-(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})-(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})$

$=-2\overrightarrow{AI}$

المساواة (2) تكافئ $\|2\overrightarrow{MG_1}\|=\|-2\overrightarrow{AI}\|$ ومنه: $MG_1=AI$

إذن: المجموعة (F) هي سطح الكرة التي مركزها النقطة G_1 ونصف قطرها AI.

5 أ- إحداثيات G_1 و G_{-1} :

تذكير: إذا كانت $G(x_G\,;y_G\,;z_G)$ مرجح الجملة المثقلة:

$\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ فإن: $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}$ ومنه:

$x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ ، $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ و $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

نستنتج أن: $G_1(0\,;0\,;0)$ و $G_{-1}(0\,;0\,;4)$

ب- إثبات أن المجموعتين (E) و (F) تتقاطعان وفق دائرة (c):

✦ نصف قطر سطح الكرة (F) هو AI ، حيث I هي منتصف القطعة $[BC]$

وبالتالي فإن إحداثياتها $(x_I\,;y_I\,;z_I)$ هي:

$x_I=\dfrac{x_B+x_C}{2}=-1$ ، $y_I=\dfrac{y_B+y_C}{2}=2$ و $z_I=\dfrac{z_B+z_C}{2}=3$

حساب المسافة AI: $AI=\sqrt{(x_I-x_A)^2+(y_I-y_A)^2+(z_I-z_A)^2}=\sqrt{6}$

✦ بُعد G_1 مركز سطح الكرة (F) عن المستوي (E) هو AG_1

A منتصف القطعة $[G_{-1}G_1]$ ومنه: $AG_1=2$

✦ بما أن بُعد المركز G_1 عن المستوي (E) أقل من نصف قطر (F) أي $2<\sqrt{6}$

فإن المجموعتين (E) و (F) تتقاطعان وفق دائرة (c) نصف قطرها r حيث:

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{AI^2-AG_1{}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(2)^2}=\sqrt{2}$