بكالوريات محلولة

تمرين محلول 1: (بكالوريا 2008 . الشعبة : رياضيات)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x-21y=78$

❶ أ- بيّن أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 5\,[7]$

- استنتج حلول المعادلة (E).

❷ أ- ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

ب- عيّن الثنائيات $(x\,;y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق:

$5^x+5^y\equiv 3\,[7]$

الحل :

❶ أ- تبيان أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

تذكير : تقبل المعادلة $ax+by=c$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كان $\text{pgcd}\,(|a|\,;|b|)$ يقسّم العدد c.

نعلم أن: $\text{pgcd}\,(3\,;21)=3$، وبما أن العدد 3 يقسّم العدد 78 $(78=3\times 26)$

نستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 5\,[7]$:

لدينا: $21y\equiv 0\,[7]$ و $78\equiv 1\,[7]$ وعليه نكتب المعادلة (E) كما يلي:

$3x\equiv 1\,[7]$ وحسب خواص الموافقة نكتب: $5\times 3x\equiv 5\times 1\,[7]$ أي: $15x\equiv 5\,[7]$

نستنتج أن: $x\equiv 5\,[7]$

- استنتاج حلول المعادلة (E):

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x\,;\,y)$ حيث : $\begin{cases} x=7k+5 \\ y=k-3 \end{cases} (k\in\mathbb{Z})$

❷ أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 :

بواقي القسمة الإقليدية لـ 5^n على 7 دورية ودورها 6 نلخصها في الجدول الآتي :

n	$6m$	$6m+1$	$6m+2$	$6m+3$	$6m+4$	$6m+5$
البواقي	1	5	4	6	2	3

(في هذا الجدول m عدد طبيعي)

ب- تعيين الثنائيات $(x\,;\,y)$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق $5^x+5^y\equiv 3\,[7]$

نعلم أن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x\,;\,y)$ حيث : $\begin{cases} x=7k+5 \\ y=k-3 \end{cases} (k\in\mathbb{Z})$

في هذا السؤال $(x\,;\,y)\in\mathbb{N}^2$ وبالتالي $k-3\geq 0$ وبوضع $k'=k-3$ مع $k'\in\mathbb{N}$

تصبح حلول المعادلة (E) كما يلي : $\begin{cases} x=7k'+26 \\ y=k' \end{cases} (k'\in\mathbb{N})$

نعوض x و y في المعادلة $5^x+5^y\equiv 3\,[7]$ فنجد $5^{6(k'+4)+2}+5^{k'}\equiv 3\,[7]$

وبالتالي : $5^{k'}\equiv 2\,[7]$ وباستخدام بواقي قسمة 5^n على 7 نستنتج $k'=6m+4$

ومنه : $\begin{cases} x=42m+54 \\ y=6m+4 \end{cases} (m\in\mathbb{N})$

تمرين محلول 2: (بكالوريا 2008 . الشعبة : تقني رياضي)

n عدد طبيعي أكبر من 5 .

❶ a و b عددان طبيعيان حيث : $a=n-2$ و $b=2n+3$.

أ- ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

ب- بيّن أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا لـ 7.

جـ- عيّن قيم n التي يكون من أجلها $PGCD\,(a\,;\,b)=7$.

❷ نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث :

$p=2n^2-7n-15$ و $q=n^2-7n+10$

أ- بيّن أن كلا من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

ب- عيّن تبعا لقيم n وبدلالة n، $PGCD\,(p\,;\,q)$.

الحل :

❶ أ- القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b :

ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ومنه : d يقسم $b-2a$

أي : d يقسم 7 .

إذن : $d\in\{1\,;\,7\}$

ب- تبيان أن a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7 :

إذا كان a و b من مضاعفات العدد 7 يكون $b-a$ من مضاعفات العدد 7

أي : $(2n+3)-(n-2)\equiv 0\,[7]$ ومنه : $n+5\equiv 0\,[7]$

إذن : a و b من مضاعفات العدد 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7

جـ- تعيين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD\,(a\,;\,b)=7$:

لدينا : $PGCD\,(a\,;\,b)=7$ معناه : a و b من مضاعفات 7 ، وحسب السؤال السابق نستنتج أن : 7 يقسم $n+5$ أي : $n+5\equiv 0\,[7]$ ومنه : $n\equiv 2\,[7]$

إذن : $n=7k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$

❷ أ- تبيان أن كلا من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$:

لدينا : $p=2n^2-7n-15=(n-5)(2n+3)$

و لدينا : $q=n^2-7n+10=(n-5)(n-2)$

نستنتج أن كلا من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

ب- تعيين تبعا لقيم n وبدلالة n، $PGCD\,(p\,;\,q)$:

لدينا : $PGCD\,(p\,;\,q)=(n-5)\times PGCD\,(a\,;\,b)$

نميّز حالتين :

- الحالة الأولى : $PGCD(a;b)=7$

في هذه الحال : $PGCD(p;q)=(n-5)\times 7$ مع $n=7k+2$ و $k\in\mathbb{N}$

وبالتالي : $PGCD(p;q)=(n-5)\times 7=49k-21$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

- الحالة الثانية : $PGCD(a;b)\neq 7$ أي : $PGCD(a;b)=1$

في هذه الحالة : $PGCD(p;q)=(n-5)\times 1=n-5$ مع $n\neq 7k+2$

تمرين محلول 3: (بكالوريا 2008 . الشعبة : تقني رياضي)

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $4x-9y=319$ ... (I)

❶ تأكد أن الثنائية $(1;82)$ حل للمعادلة (I) .

حل المعادلة (I) .

❷ عيّن الثنائيات $(a;b)$ الصحيحة، حلول المعادلة : $4a^2-9b^2=319$ ... (II)

❸ استنتج الثنائيات $(x_0;y_0)$ حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

الحل :

❶ أ- التأكد أن الثنائية $(1;82)$ حل للمعادلة (I) :

لدينا : $319=328-9=1\times 9-82\times 4$ ومنه : الثنائية $(1;82)$ حل للمعادلة (I)

ب- حل المعادلة (I) :

لدينا : $\begin{cases}4x-9y=319\\4\times 82-9\times 1=319\end{cases}$ ومنه : $4(x-82)-9(y-1)=0$

وبالتالي : $4(x-82)=9(y-1)$

من المساواة $4(x-82)=9(y-1)$ نستنتج أن 4 يقسم $9(y-1)$

وبما أن 4 و 9 أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن 4 يقسم $y-1$

ومنه : $y=4k+1$ وبالتعويض في المعادلة (I) نجد : $x=9k+82$

إذن : حلول المعادلة (I) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases}x=9k+82\\y=4k+1\end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$

❷ تعيين الثنائيات $(a;b)$ الصحيحة، حلول المعادلة (II) :

$[4a^2-9b^2=319]$ يكافئ $[(2a-3b)(2a+3b)=319]$

ونعلم أن : $319=1\times 319=319\times 1=(-1)(-319)=(-319)(-1)$
$=11\times 29=29\times 11=(-11)(-29)=(-29)(-11)$

مثلا : $\begin{cases}2a-3b=11\\2a+3b=29\end{cases}$ ينتج : $(a;b)=(10;3)$

إذن : حلول المعادلة (II) هي الثنائيات $(a;b)$ حيث :

$$(a;b)\in\left\{\begin{matrix}(-80;-53),(-80;53),(80;-53),(80;53)\\(-10;-3),(-10;3),(10;-3),(10;3)\end{matrix}\right\}$$

❸ استنتاج الثنائيات $(x_0;y_0)$:

لدينا : $(-80)^2=80^2=6400$ و $(-53)^2=53^2=2809$

لدينا : $(-10)^2=10^2=100$ و $(-3)^2=3^2=9$

إذن : $(x_0;y_0)\in\{(6400;2809),(100;9)\}$.

تمرين محلول 4: (بكالوريا 2008 . الشعبة : تسيير واقتصاد)

N عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد الذي أساسه 5 على الشكل $\overline{41x}$ ويكتب في نظام التعداد الذي أساسه 9 على الشكل $\overline{1x0}$

❶ أوجد الرقم x ثم أكتب العدد N في النظام الذي أساسه 10 .

❷ أ- أوجد أساس نظام التعداد الذي يكتب فيه العدد N على الشكل $\overline{213}$ ، نرمز لهذا الأساس بالرمز α.

ب- العددان $\overline{3456}$ و $\overline{6321}$ مكتوبان في النظام الذي أساسه α، أكتب في

نفس النظام العدد y حيث : $\overline{6321} = \overline{3456} + y$.

الحل :

❶ إيجاد الرقم x :

الشرط : $0 \leq x \leq 4$

لدينا : $N = \overline{41x} = x + 1\times5 + 4\times5^2 = x + 105$

و : $N = \overline{1x0} = 0 + x\times9 + 1\times9^2 = 9x + 81$

ومنه : $x + 105 = 9x + 81$ نستنتج أن : $x = 3$

✦ كتابة العدد N في النظام الذي أساسه 10 :

$N = \overline{413} = 3 + 1\times5 + 4\times5^2 = 3 + 105 = 108$

❷ أ- إيجاد α :

الشرط : $\alpha > 3$

لدينا : $N = \overline{213} = 3 + 1\times\alpha + 2\times\alpha^2 = 2\alpha^2 + \alpha + 3 = 108$

ومنه : $2\alpha^2 + \alpha - 105 = 0$

مميز هذه المعادلة هو : $\Delta = 841 = (29)^2$

حلا هذه المعادلة هما : $\alpha = \frac{-1+29}{4} = 7$ و $\alpha = \frac{-1-29}{4} = -\frac{15}{2}$

وبما أن α عدد طبيعي أكبر تماما من 3 فإن $\alpha = 7$.

ب- كتابة y في النظام الذي أساسه 7 :

في النظام الذي أساسه 10 :

$\overline{3456} = 6 + 5\times7 + 4\times7^2 + 3\times7^3 = 1266$

$\overline{6321} = 1 + 2\times7 + 3\times7^2 + 6\times7^3 = 2220$

تكتب عندئذ المساواة $\overline{6321} = \overline{3456} + y$ كما يلي : $y + 1266 = 2220$

ومنه : $y = 2220 - 1266 = 954$

كتابة العدد 954 في النظام الذي أساسه 7 :

954	7	
2	136	7
3	19	7
5	2	7
2	0	

a_0 ، a_1 ، a_2 ، a_3

إذن : $y = 954 = \overline{2532}$

طريقة أخرى :

$$\begin{array}{r} 3456 \\ +\ \ldots\ldots \\ \hline = 6321 \end{array} \longleftarrow \begin{array}{r} 3456 \\ +\ 2532 \\ \hline = 6321 \end{array}$$

تمرين محلول 5 : (بكالوريا 2008 مقترحة . الشعبة : رياضيات)

❶ أثبت أن العدد 251 عدد أولي .

❷ حلل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008 .

عيّن الأعداد الطبيعية a و b بحيث : $m^3 + 35d^3 = 2008$

علما أن : $m = PPCM(a;b)$ و $d = PGCD(a;b)$

الحل :

❶ إثبات أن العدد 251 عدد أولي :

لدينا : $\sqrt{251} \approx 15.84$. الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{251}$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 . العدد 251 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و 13

إذن : العدد 251 عدد أولي .

❷ تحليل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية : $2008 = 2^3\times251$

✦ استنتاج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008 :

من المساواة $2008 = 1^3\times2^3\times251$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان مكعب كل منهما يقسم 2008 هما : 1 و 2

✦ تعيين الأعداد الطبيعية a و b بحيث $m^3 + 35d^3 = 2008$:

لدينا : $m\times d = a\times b$ ومنه : $m\times d = da'\times db'$ إذن : $m = da'b'$

تصبح المساواة : $m^3 + 35d^3 = 2008$ كما يلي : $(da'b')^3 + 35d^3 = 2008$

ومنه : $d^3\left[(a'b')^3+35\right]=2008$ نستنتج أن : d^3 يقسم 2008

واعتمادا على السؤال السابق نستنتج أن : $d\in\{1;2\}$

- عندما $d=1$:

من : $d^3\left[(a'b')^3+35\right]=2008$ نحصل على : $(a'b')^3=1973$ (مستحيلة)

- عندما $d=2$:

من : $d^3\left[(a'b')^3+35\right]=2008$ نحصل على : $(a'b')^3=216$ ومنه : $a'b'=6$

توجد 4 حالات ممكنة للثنائيات $(a';b')$ هي : $(1;6)$، $(2;3)$، $(3;2)$، $(6;1)$

إذن : الثنائيات $(a;b)$ بحيث $m^3+35d^3=2008$ هي :

$(2;12)$، $(4;6)$، $(6;4)$، $(12;2)$

تمرين محلول 6: (بكالوريا 2012 . الشعبة : رياضيات)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية :

$2011x-1432y=31$ ..... (1)

أ- أثبت أن العدد 2011 أولي .

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس ، عيّن حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) ، ثم حل المعادلة (1) .

2) أ- عيّن ، حسب قيّم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .

ب- عيّن قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون :

$2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0\,[7]$

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α ، β و γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1) . عيّن α ، β و γ ، ثم اكتب N في النظام العشري .

الحل :

1) العدد 2011 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 ، 31 ، 37 ، 41 ، 43 . إذن : العدد 2011 أولي .

ب- تعيين حل خاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) :

الحاصل		1	2	2	8	1	5	5
المقسوم والقاسم	2011	1432	579	274	31	26	5	1
الباقي		579	274	31	26	5	1	0

لدينا : $2011=1432\times1+579$ ومنه : $579=2011-1432$

ولدينا : $1432=579\times2+274$ ومنه : $274=1432-579\times2$

وبالتالي : $274=1432-579\times2=1432-(2011-1432)\times2$

وعليه : $274=1432-2011\times2+1432\times2=2011\times(-2)+1432\times3$

ولدينا : $579=274\times2+31$ ومنه : $31=579-274\times2$

وبالتالي : $31=(2011-1432)-[2011\times(-2)+1432\times3]\times2$

وبعد التبسيط نجد : $31=2011-1432+2011\times4-1432\times6$

وأخيرا : $31=2011\times5-1432\times7$ وبالمطابقة مع $2011x-1432y=31$

نستنتج أن الثنائية $(x_0;y_0)=(5;7)$ حل خاص للمعادلة (1) .

✦ حل المعادلة (1) :

لدينا : $\begin{cases}2011x-1432y=31\\2011x_0-1432y_0=31\end{cases}$ بالطرح طرفا من طرف نحصل على :

$2011(x-x_0)-1432(y-y_0)=0$ ومنه $2011(x-x_0)=1432(y-y_0)$

من المساواة $2011(x-x_0)=1432(y-y_0)$ نستنتج أن 1432 يقسم الجداء $2011(x-x_0)$ و بما أن العددين 1432 و 2011 أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن 1432 يقسم $(x-x_0)$ ومنه : $x-x_0=1432k$.

إذن : $x=1432k+x_0$ حيث k عدد صحيح .

من المساواة $2011(x-x_0)=1432(y-y_0)$ نستنتج أن 2011 يقسم الجداء

$1432(y-y_0)$ و بما أن العددين 2011 و 1432 أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن 2011 يقسم $(y-y_0)$ ومنه : $y-y_0=2011k$.

إذن : $y=2011k+y_0$ حيث k عدد صحيح .

إذن : حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=1432k+5\\y=2011k+7\end{cases}$

2) أ-دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 :

$2^0\equiv 1[7]$ ، $2^1\equiv 2[7]$ ، $2^2\equiv 4[7]$ ، $2^3\equiv 1[7]$

نستنتج أن بواقي قسمة 2^n على 7 دورية ودورها 3 نلخصها في الجدول الآتي :

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n\equiv$	1	2	4

(في هذا الجدول k عدد طبيعي)

✦ إيجاد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 :

لدينا : $1432=3\times 477+1$ ومنه : $1432\equiv 1[3]$

وبالتالي : $1432^{2012}\equiv 1^{2012}[3]$ وعليه فإن : $1432^{2012}\equiv 1[3]$

نستنتج أن العدد 1432^{2012} يكتب على الشكل : $1432^{2012}=3k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$

من جهة أخرى ، لدينا : $2011=287\times 7+2$ وبالتالي : $2011\equiv 2[7]$

ومنه : $2011^{1432^{2012}}\equiv 2^{3k+1}[7]$ ومن الجدول السابق : $2^{3k+1}\equiv 2[7]$

إذن : $2011^{1432^{2012}}\equiv 2[7]$

ب- تعيين قيم n التي من أجلها يكون $2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$:

لدينا : $2010=7\times 287+1$ ومنه : $2010\equiv 1[7]$

ولدينا : $2011=7\times 287+2$ ومنه : $2011\equiv 2[7]$

ولدينا : $1432=7\times 204+4$ ومنه : $1432\equiv 4[7]$

$2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$ يكافئ $1^n+2^n+4^n\equiv 0[7]$

ونعلم أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1^n=1$ و $4^n=2^{2n}$

وبالتالي فإن : $1^n+2^n+4^n\equiv 0[7]$ يكافئ $1+2^n+2^{2n}\equiv 0[7]$

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n\equiv$	1	2	4
$2^{2n}=(2^n)^2\equiv$	1	4	2
$1+2^n+(2^n)^2\equiv$	3	0	0

من هذا الجدول نستنتج أن $2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$ من أجل $n\in\{3k+1;3k+2\}$ حيث k عدد طبيعي .

3) تعيين α ، β و γ :

لدينا : $N=\overline{2\gamma\alpha\beta}^{9}=\beta+\alpha\times 9+\gamma\times 9^2+2\times 9^3$

بما أن الثنائية $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1) فإن : $2011\beta-1432\gamma=31$

وحسب السؤال (1 – ب) نستنتج أن : $(k\in\mathbb{N})$ $\begin{cases}\beta=1432k+5\\\gamma=2011k+7\end{cases}$

لكن : $0\le\beta<9$ و $0\le\gamma<9$ ، نستنتج أن : $(\beta;\gamma)=(5;7)$

وبما أن : α ، β و γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن :

$\alpha+\gamma=2\beta$ ومنه : $\alpha=3$ إذن : $(\alpha;\beta;\gamma)=(3;5;7)$

✦ كتابة N في النظام العشري :

$N=\overline{2735}^{9}=5+3\times 9+7\times 9^2+2\times 9^3=2057$

تمرين محلول 7: (بكالوريا تونس 2008 . الشعبة : رياضيات)

❶ نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $(E).3x-8y=5$:

برهن أن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث :

$x=8k-1$ و $y=3k-1$ مع $k\in\mathbb{Z}$

❷ أ- ليكن n ، x و y ثلاثة أعداد طبيعية حيث : $n=3x+2$ و $n=8y+7$

- أثبت أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E).

ب- نعتبر الجملة $(n\in\mathbb{N})$: (S) $\begin{cases}n\equiv 2[3]\\n\equiv 7[8]\end{cases}$

- أثبت أن n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان : $n \equiv 23\,[24]$

3 أ- ليكن k عددا طبيعيا .

عيّن باقي قسمة 2^{2k} على 3 وباقي قسمة 7^{2k} على 8 .

ب- تحقق أن 1991 حل للجملة (S) وبيّن أن العدد $(1991)^{2008} - 1$ يقبل القسمة على 24 .

الحل :

1 إثبات أن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x\,;\,y)$ حيث $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 8k-1 \\ y = 3k-1 \end{cases}$

لدينا : $3x - 8y = 5$ ... (E)

نلاحظ الثنائية $(x_0\,;\,y_0) = (-1\,;-1)$ حل خاص للمعادلة (E).

$\begin{cases} 3x - 8y = 5 \\ 3x_0 - 8y_0 = 5 \end{cases}$ بالطرح طرف من طرف نحصل على :

$3(x - x_0) - 8(y - y_0) = 0$ ومنه : $3(x - x_0) = 8(y - y_0)$

8 يقسم $3(x - x_0)$ وبما أن 3 و 8 أوليان فيما بينهما فإنه حسب مبرهنة غوص

8 يقسم $x - x_0$ وبالتالي : $x - x_0 = 8k$ ومنه : $x = 8k - 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$

وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y = 3k - 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x\,;\,y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 8k-1 \\ y = 3k-1 \end{cases}$

2 أ- إثبات أن $(x\,;\,y)$ حل للمعادلة (E):

لدينا : $n = 3x + 2$ و $n = 8y + 7$ ومنه : $3x + 2 = 8y + 7$

وبالتالي : $3x - 8y = 5$. إذن : $(x\,;\,y)$ حل للمعادلة (E).

ب- إثبات أن n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n \equiv 23\,[24]$:

لدينا : $\begin{cases} n \equiv 2\,[3] \\ n \equiv 7\,[8] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} 8 \times n \equiv 8 \times 2\,[8 \times 3] \\ 3 \times n \equiv 3 \times 7\,[3 \times 8] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 8n \equiv 16\,[24] \\ 3n \equiv 21\,[24] \end{cases}$

وبالتالي : $8n - 3n \equiv 16 - 21\,[24]$ أي : $5n \equiv -5\,[24]$ ومنه : $n \equiv -1\,[24]$

لكن : $23 \equiv -1\,[24]$ وبالتالي : $n \equiv 23\,[24]$

إذن : n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n \equiv 23\,[24]$

3 أ- تعيين باقي قسمة 2^{2k} على 3 وباقي قسمة 7^{2k} على 8 :

لدينا : $2 \equiv -1\,[3]$ و $7 \equiv -1\,[8]$

ومنه : $2^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1\,[3]$ وَ $7^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1\,[8]$

ب- التحقق أن 1991 حل للجملة (S):

لدينا : $\begin{cases} 1991 = 3 \times 663 + 2 \equiv 2\,[3] \\ 1991 = 8 \times 248 + 7 \equiv 7\,[8] \end{cases}$ نستنتج أن 1991 حل للجملة (S)

✦ تبيان أن العدد $(1991)^{2008} - 1$ يقبل القسمة على 24 :

لدينا : $\begin{cases} 1991 \equiv 2\,[3] \\ 1991 \equiv 7\,[8] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} (1991)^{2008} \equiv 2^{2008}\,[3] \\ (1991)^{2008} \equiv 7^{2008}\,[8] \end{cases}$

2^{2008} من الشكل 2^{2k} و 7^{2008} من الشكل 7^{2k} ومنه : $\begin{cases} (1991)^{2008} \equiv 1\,[3] \\ (1991)^{2008} \equiv 1\,[8] \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} (1991)^{2008} - 1 \equiv 0\,[3] \\ (1991)^{2008} - 1 \equiv 0\,[8] \end{cases}$

نستنتج أن : $(1991)^{2008} - 1 \equiv 0\,[PPCM(3\,;8)]$

لكن : $PPCM(3\,;8) = 24$ (العددان 3 و 8 أوليان فيما بينهما)

إذن : العدد $(1991)^{2008} - 1$ يقبل القسمة على 24 .

تمرين محلول 8: (بكالوريا تونس 2008)

1 نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $11x - 5y = 2$

أ- تأكد أن الثنائية $(4\,;2)$ حل للمعادلة (E) .

ب- أثبت أن الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان :

$11(x-2)=5(y-4)$

جـ- استنتج حلول المعادلة (E).

❷ ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم. نضع : $a=5n+2$ و $b=7n+5$.

أ- احسب $5b-7a$ ثم استنتج أن $PGCD(a;b)=1$ أو $PGCD(a;b)=11$

ب- عيّن ، باستعمال السؤال (1) ، الأعداد الطبيعية n بحيث يكون :

$PGCD(a;b)=11$

الحل :

❶ أ- التأكد أن الثنائية $(2;4)$ حل للمعادلة (E):

لدينا : $11\times2-5\times4=22-20=2$ ومنه : الثنائية $(2;4)$ حل للمعادلة (E).

ب- إثبات أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان $11(x-2)=5(y-4)$:

لدينا : $\begin{cases}11x-5y=2\\11\times2-5\times4=2\end{cases}$ بطرح المعادلتين طرف من طرف نحصل على :

$11(x-2)-5(y-4)=0$ ومنه : $11(x-2)=5(y-4)$

جـ- استنتاج حلول المعادلة (E):

من المساواة $11(x-2)=5(y-4)$ نستنتج أن 5 يقسم الجداء $11(x-2)$

وبما أن 5 و 11 أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن 5 يقسم $x-2$

ومنه : $x-2=5k$ وبالتالي : $x=5k+2$ وبالتعويض في المعادلة (E)

نجد : $y=11k+4$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=5k+2\\y=11k+4\end{cases}$

❷ أ- حساب $5b-7a$: $5b-7a=5(7n+5)-7(5n+2)=11$

ب- استنتاج أن $PGCD(a;b)=1$ أو $PGCD(a;b)=11$:

نفرض أن : $PGCD(a;b)=d$ ومنه : d يقسم a و d يقسم b وبالتالي :

d يقسم $5b-7a$، وبما أن $5b-7a=11$ نستنتج أن d يقسم 11 .

إذن : $d\in\{1;11\}$ أي : $PGCD(a;b)=1$ أو $PGCD(a;b)=11$

جـ- تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $PGCD(a;b)=11$:

من العلاقة : $PGCD(a;b)=11$ نستنتج أن : 11 يقسم a و 11 يقسم b

وبالتالي : 11 يقسم $3a-2b$ أي : 11 يقسم $3(5n+2)-2(7n+5)$

نستنتج أن 11 يقسم $n-4$ ومنه : $n=11\alpha+4$ حيث $n\in\mathbb{N}$

إذن : قيم n بحيث يكون $PGCD(a;b)=11$ هي $n=11\alpha+4$ مع $n\in\mathbb{N}$

تمرين محلول 9: (بكالوريا 2007 . الشعبة : علوم دقيقة)

n عدد طبيعي أكبر تماما من 2، نعتبر الأعداد الطبيعية :

$a=2n+1$، $b=4n+3$ و $c=2n+3$

❶ أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما واستنتج أن الأعداد a ، b و c أولية فيما بينها .

❷ عيّن تبعا لقيم n قيمة القاسم المشترك للعددين b و c.

❸ عيّن قيمة n لكي يكون $PGCD(b;c)=3$ و $PPCM(b;c)=1305$.

❹ اكتب b^2 في نظام أساسه a.

❺ نفرض أن $(a;b;c)$ هي إحداثيات النقطة ω من الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

بيّن أن النقطة ω تنتمي إلى مستقيم (Δ) يطلب تعيينه .

❻ جد معادلة للمستوي (π) الذي يشمل المبدأ O ويحتوي على المستقيم (Δ) .

الحل :

❶ إثبات أن العددين a و b أوليان فيما بينهما :

نفرض أن $PGCD(a;b)=d$ ونبرهن أن $d=1$

من المساواة: $PGCD(a;b)=d$ نستنتج أن: $d|a$ و $d|b$

ومنه: $d|(b-2a)$ أي: $d|1$ وبالتالي: $d=1$

إذن: العددان a و b أوليان فيما بينهما.

طريقة أخرى: من المساواة $b-2a=1$ وحسب مبرهنة بيزو نستنتج أن العددين a و b أوليان فيما بينهما.

✦ استنتاج أن الأعداد a ، b و c أولية فيما بينها:

بما أن: $PGCD(a;b)=1$ فإن: $PGCD(a;b;c)=PGCD(1;c)=1$

إذن: الأعداد a ، b و c أولية فيما بينها.

❷ تعيين قيمة القاسم المشترك للعددين b و c:

ليكن: $PGCD(b;c)=d$ ومنه: $d|b$ و $d|c$ وبالتالي: $d|(2c-b)$

أي: $d|3$ ونعلم أن قواسم العدد 3 هما: 1 و 3

- إذا كان $PGCD(b;c)=3$ فإن $3|b$ أي: $3|(4n+3)$

ومنه: $3|[3(n+1)+n]$ نستنتج أن: $3|n$. إذن: $n=3k$

- إذا كان $PGCD(b;c)=1$ نستنتج أن: $n=3k+1$ أو $n=3k+2$

خلاصة:

✦ إذا كان $PGCD(b;c)=3$ فإن: $n=3k$ مع $k\in\mathbb{N}$

✦ إذا كان $PGCD(b;c)=1$ فإن: $n=3k+1$ أو $n=3k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$

❸ تعيين قيمة n لكي يكون $PGCD(b;c)=3$ و $PPCM(b;c)=1305$:

نعلم أن: $PGCD(b;c)\times PGCM(b;c)=b\times c$

ومنه: $3\times 1305=(4n+3)(2n+3)$

وبالتالي: $8n^2+18n-3906=0$ وبقسمة الطرفين على 2 نحصل على المعادلة: $(E)\ \ldots\ 4n^2+9n-1953=0$

مميّز المعادلة (E) هو $\Delta=31329=(177)^2$

بما أن $\Delta>0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين هما:

$n_1=21$ و $n_2=\frac{93}{2}$ (الحل $\frac{93}{2}$ مرفوض لأن $\frac{93}{2}\notin\mathbb{N}$)

إذن: يكون $PGCD(b;c)=3$ و $PPCM(b;c)=1305$ من أجل: $n=21$

❹ كتابة b^2 في نظام أساسه a:

لدينا: $b^2=(4n+3)^2=(1+2a)^2=1+4a+4a^2$ ومنه: $b^2=\overline{441}$

إذن: b^2 يكتب $\overline{441}$ في النظام ذي الأساس a.

❺ تبيان أن النقطة ω تنتمي إلى مستقيم (Δ):

لدينا: $\omega(a;b;c)$ حيث: $\begin{cases}a=2n+1\\b=4n+3\\c=2n+3\end{cases}$ ..... (s)

ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;3;3)$ و $\vec{u}(2;4;2)$ شعاع توجيه له

مجموعة النقط ω هي نقط من المستقيم (Δ) التي إحداثياتها أعداد طبيعية .

❻ تعيين معادلة للمستوي (π) الذي يشمل المبدأ O ويحتوي على المستقيم (Δ):

✦ إذا كان $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (π) فإن: $\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}\\\overrightarrow{O\omega}\perp\vec{n}\end{cases}$

أي: $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\\overrightarrow{O\omega}.\vec{n}=0\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}2a+4b+2c=0\\a+3b+3c=0\end{cases}$ وبحل هذه الجملة مع فرض $c=1$ نحصل على $\vec{n}(3;-2;1)$

تكون عندئذ معادلة المستوي (π) من الشكل: $3x-2y+z+d=0$

ولدينا : $O \in (\pi)$ ومنه : $d = 0$

إذن : معادلة المستوي (π) هي $3x - 2y + z = 0$

تمرين محلول 10: (بكالوريا 2007 . الشعبة : علوم الطبيعة و الحياة)

$\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة، نعتبر المعادلة :

(I) ... $4862x - 1430y = 2002$

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد **4862** ، **1430** ، **2002** .
2. حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (I) ذات المجهول $(x\,;\,y)$.
3. a و b عددان طبيعيان حيث $(a\,;\,b)$ حل للمعادلة (I)، d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

– عيّن قيم d الممكنة ثم أوجد العددين a و b عندما $d = 7$.

الحل :

1. حساب القاسم المشترك الأكبر للأعداد **4862** ، **1430** ، **2002** :

طريقة : عند البحث عن القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد يمكن تعويض عددين منها بقاسمهما المشترك الأكبر .

$PGCD\,(4862\,;1430\,;2002) = 286$

2. حل المعادلة (I):

بقسمة طرفي المعادلة (I) على **286** نحصل على المعادلة : (II) ... $17x - 5y = 7$

نلاحظ أن الثنائية $(x_0\,;\,y_0) = (1\,;2)$ حل خاص للمعادلة (II) .

لدينا : $\begin{cases} 17x - 5y = 7 \\ 17x_0 - 5y_0 = 7 \end{cases}$ بالطرح طرف من طرف نحصل على :

$17(x - x_0) - 5(y - y_0) = 0$ ومنه : $17(x - x_0) = 5(y - y_0)$

5 يقسم $17(x - x_0)$ وبما أن 5 و 17 أوليان فيما بينهما فإنه حسب مبرهنة غوص

5 يقسم $x - x_0$ وبالتالي : $x - x_0 = 5k$ ومنه : $x = 5k + 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$

وبالتعويض في المعادلة (II) نجد : $y = 17k + 2$ مع $k \in \mathbb{Z}$

إذن : حلول المعادلة (I) هي الثنائيات $(x\,;\,y)$ حيث : $\begin{cases} x = 5k + 1 \\ y = 17k + 2 \end{cases}$; $k \in \mathbb{Z}$

3. تعيين قيم d الممكنة :

بما أن الثنائية $(a\,;\,b)$ حل للمعادلة (I) فإن : $17a - 5b = 7$

لدينا : $PGCD\,(a\,;\,b) = d$ ومنه : $d \mid a$ و $d \mid b$ وبالتالي : $d \mid (17a - 5b)$

أي : $d \mid 7$. إذن : $d \in \{1\,;7\}$

إيجاد العددين a و b عندما $d = 7$:

بما أن الثنائية $(a\,;\,b)$ حل للمعادلة (I) فإن : $\begin{cases} a = 5k + 1 \\ b = 17k + 2 \end{cases}$; $k \in \mathbb{Z}$

لدينا : $PGCD\,(a\,;\,b) = 7$ ومنه : $7 \mid a$ و $7 \mid b$ وبالتالي : $7 \mid (7a - 2b)$

أي : $7 \mid (k + 3)$ ومنه : $k + 3 = 7\alpha$ أخيرا : $k = 7\alpha - 3$

وعليه يكون : $\begin{cases} a = 5(7\alpha - 3) + 1 \\ b = 17(7\alpha - 3) + 2 \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{Z}$

إذن : $a = 35\alpha - 14$ و $b = 119\alpha - 49$ مع $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

تمرين محلول 11: (بكالوريا 2007 . الشعبة : تقنيات المحاسبة)

1. عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين **1626** و **306** .
2. عيّن الثنائيات $(a\,;\,b)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $a > b$ و $\begin{cases} a \times b = 11592 \\ d = 6 \end{cases}$

حيث d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

الحل :

1. تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين **1626** و **306** :

باستعمال خوارزمية إقليدس كما يبيّنه الجدول الآتي نجد $PGCD\,(1626\,;306) = 6$

الحاصل		5	3	5	3
المقسوم والقاسم	1626	306	96	18	6
الباقي		96	18	6	0

❷ تعيين الثنائيات $(a;b)$:

✦ إذا كان $PGCD(a;b)=d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما بحيث : $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$.

من المساواة : $PGCD(a;b)=6$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما بحيث : $a=6a'$ و $b=6b'$.

لدينا : $a\times b=11592$ ومنه : $6a'\times 6b'=11592$ وبالتالي : $a'\times b'=322$

نحلل العدد **322** إلى جداء عددين طبيعيين :

$322=322\times 1=161\times 2=46\times 7=23\times 14$

بما أن : $a>b$ فإن : $a'>b'$، وبالتالي توجد **4** حالات ممكنة للثنائيات $(a';b')$ هي : $(322;1)$، $(161;2)$، $(46;7)$، $(23;14)$.

إذن : الثنائيات $(a;b)$ المطلوبة هي :

$(1932;6)$، $(966;12)$، $(276;42)$، $(138;84)$

تمرين محلول 12: (Bac 2007 Nouvelle Calédonie)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث :

(E) ..... $5x-26y=2$

❶ حل المعادلة (E).

❷ استنتج أنه توجد ثنائية وحيدة $(x;y)$ من حلول المعادلة (E) حيث $0\le x\le 25$

الحل :

❶ حل المعادلة (E):

✦ تعيين حل خاص للمعادلة (E):

الثنائية $(x_1;y_1)=(-10;-2)$ حل خاص للمعادلة (E)

✦ حل المعادلة (E):

لدينا : $\begin{cases}5x-26y=2\\5x_1-26y_1=2\end{cases}$ ومنه : $5(x-x_1)-26(y-y_1)=0$

وبالتالي : $5(x-x_1)=26(y-y_1)$

من المساواة $5(x-x_1)=26(y-y_1)$ نستنتج أن **26** يقسم الجداء $5(x-x_1)$

وبما أن **26** و **5** أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن **26** يقسم $x-x_1$

ومنه : $x-x_1=26k$ وبالتالي : $x=26k-10$ وبالتعويض في المعادلة (E)

نجد : $y=5k-2$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases}x=26k-10\\y=5k-2\end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$

✦ طريقة أخرى لحل المعادلة (E):

نكتب المعادلة (E) باستعمال الموافقة بتردید **5** كما يلي : $-26y\equiv 2\ [5]$

ومنه : $-26y\equiv 2\ [5]$ وحيث أن : $-26\equiv 4\ [5]$ نستنتج أن : $4y\equiv 2\ [5]$

ومنه : $4\times 4y\equiv 4\times 2\ [5]$ وبالتالي : $y\equiv 3\ [5]$ إذن : $y=5k'+3$

وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $x=26k'+16$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases}x=26k'+16\\y=5k'+3\end{cases}$ $(k'\in\mathbb{Z})$

ملاحظة:

يمكن الحصول على نفس الجملة $\begin{cases}x=26k-10\\y=5k-2\end{cases}$ وذلك بوضع $k'=k-1$

❷ استنتاج أنه توجد ثنائية وحيدة $(x;y)$ من حلول المعادلة (E) حيث $0\le x\le 25$

لدينا : $0\le x\le 25$ أي : $0\le 26k-10\le 25$ ومنه : $10\le 26k\le 35$

وبالقسمة على **26** ينتج : $0.38\le k\le 1.34$ لكن k عدد صحيح

نستنتج أن : $k=1$ وبذلك نجد : $(x;y)=(16;3)$

إذن : الثنائية الوحيدة المطلوبة هي $(x;y)=(16;3)$

تمرين محلول 13: (بكالوريا)

من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر العدد α_n حيث: $\alpha_{n+1}=2\alpha_n-1$

1 تحقق أن: $\alpha_{n+1}=2\alpha_n-1$، واستنتج أن α_n و α_{n+1} أوليان فيما بينهما.

2 نعتبر العدد β_n حيث $\beta_n-\alpha_n=3$.

أ- ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين α_n و β_n ؟

ب- ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 2^n على 3.

3 أ- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تجعل $\beta_n\equiv 0\,[3]$.

ب- استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل α_n و β_n أوليان فيما بينهما.

الحل:

1 التحقق أن $\alpha_{n+1}=2\alpha_n-1$:

تذكير: للتحقق من صحة مساواة نتبع إحدى الطرق التالية:

- ننطلق من الطرف الأول وباستعمال آليات التبسيط نصل إلى الطرف الثاني.
- ننطلق من الطرف الثاني وباستعمال آليات التبسيط نصل إلى الطرف الأول.
- نقوم بتبسيط الطرف الأول وتبسيط الطرف الثاني ونقارن بين نتيجتي التبسيطين.

$$\alpha_{n+1}=2^{(n+1)+1}+1=2\times 2^{n+1}+1=2\times(2^{n+1}+1)-1=2\alpha_n-1$$

إذن: $\alpha_{n+1}=2\alpha_n-1$

✦ استنتاج أن العددين α_n و α_{n+1} أوليان فيما بينهما:

تذكير بمبرهنة بيزو: يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث: $au+bv=1$

من السؤال السابق وجدنا أن: $\alpha_{n+1}=2\alpha_n-1$ ومنه: $2\alpha_n-\alpha_{n+1}=1$

وحسب مبرهنة بيزو يوجد العددان الصحيحان 2 و 1- حيث $2\alpha_n-\alpha_{n+1}=1$

نستنتج أن العددين α_n و α_{n+1} أوليان فيما بينهما.

2 نعتبر العدد β_n حيث $\beta_n-\alpha_n=3$.

أ- تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين α_n و β_n:

نضع: $d=PGCD(\alpha_n;\beta_n)$ ومنه: $d\mid\alpha_n$ و $d\mid\beta_n$

وبالتالي: $d\mid(\beta_n-\alpha_n)$ لكن: $\beta_n-\alpha_n=3$ ومنه: $d\mid 3$

نستنتج أن القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha_n;\beta_n)$ هي: 1 و3

ب- دراسة بواقي قسمة 2^n على 3:

$2^0\equiv 1\,[3]$، $2^1\equiv 2\,[3]$ ، $2^2\equiv 1\,[3]$

من العلاقة: $2^2\equiv 1\,[3]$ نستنتج أن: $2^{2k}\equiv 1\,[3]$ و $2^{2k+1}\equiv 2\,[7]$.

- إذا كان $n=2k$ مع $k\in\mathbb{N}$ (n زوجي) فإن باقي قسمة 2^n على 3 هو 1

- إذا كان $n=2k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$ (n فردي) فإن باقي قسمة 2^n على 3 هو 2

3 أ- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تجعل $\beta_n\equiv 0\,[3]$:

لدينا: $\beta_n\equiv 0\,[3]$ وبما أن $\beta_n-\alpha_n=3$ نستنتج أن: $\alpha_n+3\equiv 0\,[3]$

ومنه: $\alpha_n\equiv 0\,[3]$ لكن: $\alpha_n=2^{n+1}+1$ وبالتالي: $2^{n+1}+1\equiv 0\,[3]$

وبإضافة العدد 2 للطرفين ينتج: $2^{n+1}\equiv 2\,[3]$ نستنتج أن $n+1=2k+1$

إذن: $\beta_n\equiv 0\,[3]$ من أجل $n=2k$ مع $k\in\mathbb{N}$.

ب- استنتاج مجموعة قيم n التي تجعل α_n و β_n أوليان فيما بينهما:

من السؤال السابق نستنتج أن العددين α_n و β_n أوليان فيما بينهما من أجل $n=2k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$.

تمرين محلول 14: (بكالوريا)

1 أ- أنشر $(n+3)(3n^2-9n+16)$ مع $n \in \mathbb{N}$.

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$

ب- برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم.

2 برهن أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a، b و c يكون:

$$PGCD(a,b)=PGCD(bc-a\ ,\ b)$$

3 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2:

$$PGCD(3n^3-11n\ ,n+3)=PGCD(48\ ,n+3)$$

4 أ- عيّن مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 .

ب-استنتج الأعداد الطبيعية n بحيث يكون الكسر $A=\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا .

الحل :

1 أ- من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $(n+3)(3n^2-9n+16)=3n^3-11n+48$

- استنتاج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$:

بما أن $3n^2-9n+16$ هو مجموع أعداد صحيحة فهو عدد صحيح وبالتالي :

$3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$.

ب- البرهان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $3n^2-9n+16$ عدد طبيعي غير معدوم :

مميز ثلاثي الحدود $3x^2-9x+16$ هو $\Delta=-111$ (أي سالب) وبالتالي

فإشارته هي إشارة $a=3$ (أي موجبة) نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x،

$$3x^2-9x+16>0$$

إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $3n^2-9n+16$ عدد طبيعي غير معدوم.

2 البرهان أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a، b و c يكون:

$$PGCD(a,b)=PGCD(bc-a\ ,\ b)$$

لتكن E مجموعة القواسم المشتركة للعددين a، b و F مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و $bc-a$.

لإثبات صحة المساواة $PGCD(a,b)=PGCD(bc-a\ ,\ b)$ يكفي إثبات أن $E=F$.

- إذا كان $d \in E$ فإن d يقسم a و b فهو يقسم a و bc

وبالتالي فهو يقسم $bc-a$ و b. نستنتج أن: $d \in F$ ... (1)

عكسيا : - إذا كان $d \in F$ فإن d يقسم $bc-a$ و b، فهو يقسم $bc-a$ و bc

وبالتالي فهو يقسم $bc-(bc-a)$ أي: d يقسم a ومنه: d يقسم a و b

نستنتج أن: $d \in E$ ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: $E=F$

فلاصة:

$$PGCD(a,b)=PGCD(bc-a\ ,\ b)$$

3 البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 :

$$PGCD(3n^3-11n\ ,n+3)=PGCD(48\ ,n+3)$$

نستعمل نتيجة السؤال (2) مع وضع :

$a=48$، $b=n+3$ و $c=3n^2-9n+16$

ومنه: $PGCD(3n^3-11n\ ,n+3)=PGCD(48\ ,n+3)$

4 أ- مجموعة قواسم 48 هي: $\{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$

ب- استنتاج الأعداد الطبيعية n بحيث يكون الكسر $A=\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا :

لدينا: $(n+3) \in \mathbb{N}$. الشرط اللازم لكي يكون A عددا طبيعيا هو أن يكون

$n(3n^2-11)\geq 0$ أي: $3n^3-11n\geq 0$

هذا الشرط محقق من أجل $n=0$ أو $n\geq 2$

- عندما $n=0$: $A=0$ وبالتالي $A\in\mathbb{N}$

- عندما $n\geq 2$: يكون $A\in\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان $n+3$ يقسم $3n^3-11n$

أي: $PGCD(3n^3-11n\,,n+3)=n+3$

وحسب السؤال السابق نستنتج أن $PGCD(48\,,n+3)=n+3$

وبالتالي $n+3$ يقسم 48

عندما $n\geq 2$ يكون $n+3\geq 5$ ومنه: $n+3\in\{6;8;12;16;24;48\}$

وبالتالي: $n\in\{3;5;9;13;21;45\}$

فلاصة:

$A\in\mathbb{N}$ من أجل: $n\in\{0;3;5;9;13;21;45\}$

تمرين محلول 15: (بكالوريا)

1. ادرس، تبعا لقيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7.

2. برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون العدد $2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1}$ قابلا للقسمة على 7.

3. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام u_n حيث: $u_n=2\times 3^n+3\times 4^n$.

- احسب، بدلالة n، المجموع: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

- ما هي قيم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها S_n قابلا للقسمة على 7 ؟

الحل:

1. دراسة باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7:

بواقي قسمة 3^n على 7 دورية ودورها 6 نلخصها في الجدول الآتي:

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
البواقي	1	3	2	6	4	5

بواقي قسمة 4^n على 7 دورية ودورها 3 نلخصها في الجدول الآتي:

n	$3k'$	$3k'+1$	$3k'+2$
البواقي	1	4	2

في هذين الجدولين k و k' عددان طبيعيان .

2. البرهان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون العدد $2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1}$ قابلا للقسمة على 7:

لدينا: $2006\equiv 4\,[7]$ ومنه: $2\times 2006^{3n+2}\equiv 2\times 4^{3n+2}\equiv 2\times 2\,[7]$

ولدينا: $1424\equiv 3\,[7]$ ومنه: $1424^{6n+1}\equiv 3^{6n+1}\equiv 3\,[7]$

إذن: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\equiv 4+3\equiv 0\,[7]$

3. حساب المجموع S_n:

نضع: $\alpha_n=2\times 3^n$ و $\beta_n=3\times 4^n$

وبالتالي فإن (α_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدّها الأول $\alpha_0=2$

و (β_n) متتالية هندسية أساسها $q'=4$ وحدّها الأول $\beta_0=3$

$$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n=(\alpha_0+\beta_0)+(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)$$

ومنه:

$$=[\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n]+[\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_n]$$

$$=\alpha_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+\beta_0\times\frac{1-q'^{n+1}}{1-q'}=3^{n+1}+4^{n+1}-2$$

إذن : $S_n = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$

○ قيم n التي يكون من أجلها S_n قابلا للقسمة على 7 :

$S_n \equiv 0\,[7]$ يكافئ $3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2\,[7]$ ومنه : $3\times 3^n + 4\times 4^n \equiv 2\,[7]$

بواقي قسمة 3^n على 7 دورية ودورها 6 و بواقي قسمة 4^n على 7 دورية ودورها 3 . نقوم بتوحيد الدور (بنفس طريقة توحيد المقامات) فيكون 6 هو الدور الموحد . الجدول الآتي يبيّن كيفية استنتاج قيم n بحيث S_n يقبل القسمة على 7 .

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 3^n على 7	1	3	2	6	4	5
بواقي قسمة 3×3^n على 7	3	2	6	4	5	1
بواقي قسمة 4^n على 7	1	4	2	1	4	2
بواقي قسمة 4×4^n على 7	4	2	1	4	2	1
$3\times 3^n + 4\times 4^n$	0	4	0	1	0	2

من هذا الجدول نستنتج أن قيم n المطلوبة من الشكل $6k+5$

إذن : S_n يقبل القسمة على 7 من أجل $n = 6k+5$ مع $k \in \mathbb{Z}$

تمرين محلول 15: (بكالوريا)

❶ جد $PGCD\,(2905\,;2490\,;32785)$.

❷ حل، في $\mathbb{Z}^2$، المعادلة : $7x + 6y = 79$. (لاحظ أن : $79 = 7 + 72$)

❸ اشترى نادي كرة يد ملابس رياضية للاعبيه، إذا علمنا أن ثمن بذلة اللاعب هو $2905\ DA$ وثمن بذلة اللاعبة هو $2490\ DA$ وعلمنا أن النادي دفع في المجموع $32785\ DA$. ما هو عدد اللاعبين وعدد اللاعبات ؟

الحل :

❶ حساب $PGCD\,(2905\,;2490\,;32785)$:

$PGCD\,(2905\,;2490\,;32785) = 415$

❷ حل المعادلة $7x + 6y = 79$:

يمكن كتابة المعادلة : $7x + 6y = 79$ على الشكل : $7x + 6y = 72 + 7$

ومنه : $7x - 7 = 72 - 6y$ وبالتالي : $7(x-1) = 6(12-y)$

من المساواة $7(x-1) = 6(12-y)$ نستنتج أن 6 يقسم الجداء $7(x-1)$

وبما أن 6 و 7 أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن 6 يقسم $x-1$

ومنه : $x-1 = 6k$ إذن : $x = 6k+1$ وبالتعويض في المعادلة :

$7x + 6y = 79$ نجد : $y = -7k + 12$

إذن : حلول المعادلة المعطاة هي الثنائيات $(x\,;y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 6k+1 \\ y = -7k+12 \end{cases}$

❸ عدد اللاعبين وعدد اللاعبات :

نفرض أن عدد اللاعبين هو x وأن عدد اللاعبات هو y وبالتالي :

$2905x + 2490y = 32785$ وبالقسمة على 415 ينتج : $7x + 6y = 79$

ومن السؤال السابق نستنتج أن : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 6k+1 \\ y = -7k+12. \end{cases}$

لكن : $x > 0$ و $y > 0$ أي : $6k+1 > 0$ و $-7k+12 > 0$ ومنه : $k \in \{0\,;1\}$

نستنتج أن : $(x\,;y) \in \{(1\,;12),(7\,;5)\}$

إذن : عدد اللاعبين 1 وعدد اللاعبات 12 أو عدد اللاعبين 7 وعدد اللاعبات 5 .

تمرين محلول 17: (بكالوريا)

❶ جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180 .

❷ حل، في المجموعة $\mathbb{Z}^2$، المعادلة : $225x - 180y = 90$ ... (1)

❸ عيّن مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x - y + 1| < 2$

❹ a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ ، $\overline{252}$ في النظام ذي الأساس α، ويكتبان $\overline{44}$ ، $\overline{206}$ في النظام ذي الأساس β.

عيّن α و β ثم a و b.

الحل :

❶ حساب $PGCD(180;225)$:

$PGCD(180;225) = 5 \times PGCD(36;45) = 5 \times 9 \times PGCD(4;5) = 45$

❷ حل المعادلة (1) :

بقسمة طرفي المعادلة (1) على العدد 5 ينتج : $5x - 4y = 2$ ... (2)

تكتب المعادلة (2) باستعمال الموافقة بترديد 5 كما يلي : $-4y \equiv 2\ [5]$

ومنه : $y \equiv 2\ [5]$ (لأن : $-4 \equiv 1\ [5]$) وبالتالي : $y = 5k + 2$

وبالتعويض في المعادلة (2) نجد : $x = 4k + 2$

إذن : حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 4k + 2 \\ y = 5k + 2 \end{cases}$

❸ تعيين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x - y + 1| < 2$:

لدينا : $|x - y + 1| < 2$ يكافئ $|(4k + 2) - (5k + 2) + 1| < 2$

ومنه : $|1 - k| < 2$ ، ونعلم أن : $|x| < \alpha$ يكافئ $-\alpha < x < +\alpha$

وبالتالي : $-2 < 1 - k < 2$ وعليه فإن : $-1 < k < 3$ أي : $k \in \{0;1;2\}$

نستنتج أن : $(x;y) \in \{(2;2),(6;7),(10;12)\}$

❹ تعيين α و β ثم a و b :

الشرطان : $\alpha > 5$ و $\beta > 6$.

لدينا : $a = \overline{52}_\alpha = \overline{44}_\beta$ ومنه : $5\alpha + 2 = 4\beta + 4$ أي : $5\alpha - 4\beta = 2$

ومن السؤال (2) وجدنا أن مجموعة حلول المعادلة $5x - 4y = 2$ ... (2) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 4k + 2 \\ y = 5k + 2 \end{cases}$

نستنتج أن مجموعة حلول المعادلة $5\alpha - 4\beta = 2$ هي الثنائيات $(\alpha;\beta)$ حيث : $(k \in \mathbb{N})$ $\begin{cases} \alpha = 4k + 2 \\ \beta = 5k + 2 \end{cases}$

ولدينا : $b = \overline{252}_\alpha = \overline{206}_\beta$ ومنه : $2 + 5\alpha + 2\alpha^2 = 6 + 2\beta^2$ أي :

$2\alpha^2 + 5\alpha - 2\beta^2 - 4 = 0$.

وبتعويض α بـ $4k + 2$ و β بـ $5k + 2$ نحصل على : $3k^2 - 2k - 1 = 0$

وبحل هذه المعادلة نجد : $k = 1$ أو $k = -\frac{1}{3}$ (مرفوض)

من أجل $k = 1$ ينتج : $(\alpha;\beta) = (6;7)$ ومنه : $(a;b) = (32;104)$

تمرين محلول 18 : (بكالوريا)

❶ حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول $(x';y')$: $9x' - 14y' = 13$

علما أن $(3;1)$ حل لها. (يرمز $\mathbb{Z}$ إلى مجموعة الأعداد الصحيحة)

❷ نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $45x - 28y = 130$

بيّن أنه إذا كان $(x;y)$ حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 وأن y مضاعف للعدد 5 ثم حل هذه المعادلة.

❸ N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في نظام تعداد أساسه 9 ويكتب $\overline{5\beta\beta6}$ في نظام تعداد أساسه 7 . عيّن العددين الطبيعيين α، β ثم اكتب N في النظام العشري .

تمرين محلول 19 : (بكالوريا)

لتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة ولتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية .

1 عيّن مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث: $3x-5\equiv 0\ [11]$.

2 نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $(E)\ldots\ldots 3x-11y=5$

أ- حل هذه المعادلة (يمكن استعمال نتيجة السؤال الأول).

ب- ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y

ما هي القيم الممكنة للعدد d إذا كان $(x\,;y)$ حلا للمعادلة (E)؟

جـ- عيّن الثنائيات $(x\,;y)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $d=5$

تمرين محلول 20: (بكالوريا)

$\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة .

لتكن في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$، المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$:

$(E)\ldots\ldots 43x-13y=\lambda$ مع λ عدد صحيح.

1 تحقق أن $(-10\lambda\,;-3\lambda)$ حل للمعادلة (E).

- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E).

2 N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام تعداد أساسه 6 ويكتب $\overline{\beta 0\gamma\gamma\gamma}$ في نظام تعداد أساسه 5 .

- بيّن أن الأعداد α، β و γ تحقق : $43\alpha-13\beta=\gamma$.

- عيّن α ، β و γ ثم اكتب N في النظام العشري.

تمرين محلول 21: (بكالوريا)

1 α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

جد α و β حيث: $\beta(\beta^3-1)=28\alpha^2$

2 a ، b ، c ، d و e أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية أساسها r حيث a و r أوليان فيما بينهما و $28a^3=e-b$

احسب الأساس r ثم الأعداد a ، b ، c ، d و e.