التمرين 1:

(Bac Polynésie Juin 2010 S)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر:

النقطتين $A(1;1;1)$ و $B(3;2;0)$ ؛

المستوي (P) المارّ بالنقطة B و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له؛

المستوي (Q) الذي معادلة له $x-y+2z+4=0$ ؛

سطح الكرة (S) التي مركزها A ونصف قطرها AB.

1) بيّن أن معادلة ديكارتية للمستوي (P) هي: $2x+y-z-8=0$.

2) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S).

3) أ- احسب المسافة بين النقطة A والمستوي (Q).

- استنتج أن المستوي (Q) مماس لسطح الكرة (S).

ب- هل المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S)؟

4) لتكن النقطة $C(0;2;-1)$ المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q).

أ- بيّن أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان.

ب- ليكن (D) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q).

بيّن أن تمثيل وسيطي للمستقيم (D) هو: $\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \\ z=4-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

جـ- تحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (D).

د- نسمي (R) المستوي المعرف بالنقطة A والمستقيم (D).

هل الجملة الآتية صحيحة أو خاطئة؟ علل إجابتك.

«كل نقطة من (R) متساوية المسافة عن النقطتين B و C».

الحل:

1) تبيان أن $2x+y-z-8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P):

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(P)$ يكافئ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BM}$ ومنه: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}=0$

لدينا: $\overrightarrow{BM}(x-3;y-2;z)$ و $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$

ومنه: $2\times(x-3)+1\times(y-2)-z=0$ وبالتالي: $2x+y-z-8=0$

إذن: $2x+y-z-8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

❖ طريقة أخرى:

بما أن $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) فإن معادلته من الشكل:

$2x+y-z+d=0$ حيث d عدد حقيقي.

وبما أن $B\in(P)$ فإن $2\times3+2-0+d=0$ ومنه: $d=-8$.

إذن: $2x+y-z-8=0$ هي معادلة للمستوي (P).

2) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S):

تذكير: معادلة سطح الكرة التي مركزها النقطة $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ ونصف قطرها r هي: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

لدينا: $A(1;1;1)$ و $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ ومنه: $AB=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

إذن: معادلة (S) هي: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$.

3) أ- حساب المسافة بين النقطة A والمستوي (Q):

تذكير: المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (Q) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(Q))$ حيث:

$$d(A;(Q))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

معادلة للمستوي (Q) هي: $x-y+2z+4=0$ و $A(1;1;1)$

ومنه: $d(A;(Q))=\frac{|1-1+2+4|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

○ استنتاج أن المستوي (Q) مماس لسطح الكرة (S):

بما أن المسافة بين النقطة A والمستوي (Q) تساوي نصف قطر سطح الكرة (S)

أي: $d(A;(Q))=r=\sqrt{6}$، نستنتج أن المستوي (Q) مماس لسطح الكرة (S)

ب- هل المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S):

B هي نقطة من سطح الكرة (S) التي مركزها A و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) الذي يشمل النقطة B، نستنتج أن المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S).

طريقة أخرى: حساب المسافة بين النقطة A و المستوي (P)

معادلة للمستوي (P) هي: $2x+y-z-8=0$ و $A(1;1;1)$

لدينا: $d(A;(P))=\frac{|2+1-1-8|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

4) أ- تبيان أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\vec{n}(1;-1;2)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (Q) والشعاعان $\overrightarrow{AB}$، $\vec{n}$ غير مرتبطين خطيا (لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AB}=k\vec{n}$). نستنتج أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان.

ب- تبيان أن تمثيل وسيطي للمستقيم (D) هو $\begin{cases}x=t\\y=12-5t\\z=4-3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D):

لدينا: $\begin{cases}2x+y-z-8=0\\x-y+2z+4=0\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}z=2x+y-8\\x-y+2(2x+y-8)+4=0\end{cases}$

وبالتالي: $\begin{cases}z=2x+y-8\\5x+y-12=0\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}y=12-5x\\z=2x+12-5x-8\end{cases}$

أخيرا: $\begin{cases}y=12-5x\\z=-3x+4\end{cases}$ وبوضع: $x=t$ ينتج: $\begin{cases}x=t\\y=12-5t\\z=4-3t\end{cases}$

إذن: (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (D) تمثيل وسيطي له كما يلي:

$$\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \\ z=4-3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

❖ طريقة أخرى:

إحداثيات M نقطة كيفية من (D) هي: $(t\,;\,12-5t\,;\,4-3t)$ حيث $t\in\mathbb{R}$

$M\in(P)$ ومنه $2t+(12-5t)-(4-3t)-8=5t-5t+12-12=0$

$M\in(Q)$ ومنه $t-(12-5t)+2(4-3t)+4=6t-6t-12+12=0$

زيادة على ذلك: $\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{n}$ الشعاعان الناظميان على المستويين (P) و (Q) على الترتيب غير مرتبطين خطيا.

إذن: (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (D) تمثيل وسيطي له كما يلي:

$$\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \\ z=4-3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

جـ- التحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (D) :

تذكير: تنتمي النقطة A إلى المستقيم (D) إذا عوضنا بإحداثيات A في جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) وحصلنا على قيمة وحيدة للوسيط t .

لدينا: $\begin{cases} 1=t \\ 1=12-5t \\ 1=4-3t \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} t=1 \\ t=\frac{11}{5} \\ t=1 \end{cases}$ نستنتج أن A لا تنتمي إلى (D).

د- صحة أو خطأ الجملة:

نسمي (R) المستوي المعرف بالنقطة A والمستقيم (D).

نعيّن نقطتين M و N من المستقيم (D):

من أجل $t=0$ نحصل على $M\,(0\,;12\,;0)$

ومن أجل $t=1$ نحصل على $N\,(1\,;7\,;1)$

بما أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (D) فإن (R) هو المستوي (AMN).

B و C نقطتان من سطح الكرة (S) التي مركزها A، ومنه A متساوية المسافة عن النقطتين B و C وهذا يعني أن النقطة A تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ ... (1)

التحقق أن النقطة M متساوية المسافة عن النقطتين B و C :

لدينا: $BM\,(-3\,;10\,;4)$ ومنه: $BM=\sqrt{9+100+16}=5\sqrt{5}$

ولدينا: $CM\,(0\,;10\,;5)$ ومنه: $CM=\sqrt{0+100+25}=5\sqrt{5}$

وبالتالي فإن النقطة M متساوية المسافة عن النقطتين B و C. وهذا يعني أن النقطة M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[BC]$... (2)

التحقق أن النقطة N متساوية المسافة عن النقطتين B و C :

لدينا: $\overrightarrow{BN}\,(-2\,;5\,;1)$ ومنه: $BN=\sqrt{4+25+1}=\sqrt{30}$

ولدينا: $\overrightarrow{CN}\,(1\,;5\,;2)$ ومنه: $CN=\sqrt{1+25+4}=\sqrt{30}$

وبالتالي فإن النقطة N متساوية المسافة عن النقطتين B و C. وهذا يعني أن النقطة N تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[BC]$... (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن النقط A ، M و N تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[BC]$.

إذن: الجملة الآتية صحيحة:

«كل نقطة من (R) متساوية المسافة عن النقطتين B و C»

التمرين 2:

(Bac Pondichéry Avril 2010)

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

1) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases} x=t+2 \\ y=-2t \\ z=3t-1 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ يوازي المستوي الذي معادلة له: $x+2y+z-3=0$.

2) المستويات (P) ، (P') و (P'') التي معادلاتها على الترتيب:

$x-2y+3z=3$ ، $2x+3y-2z=6$ وَ $4x-y+4z=12$

ليس لها أي نقطة مشتركة.

3) المستقيمان اللذان تمثيلا هما الوسيطيان:

$\begin{cases} x=-3t+2 \\ y=t+1 \\ z=2t-3 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ وَ $\begin{cases} x=2t'+7 \\ y=2t'+2 \\ z=-t'-6 \end{cases} \quad (t'\in\mathbb{R})$ هما مستقيمان متقاطعان.

4) نعتبر النقط: $A(-1;0;2)$ ، $B(1;4;0)$ و $C(3;-4;-2)$.

معادلة للمستوي (ABC) هي: $x+z=1$.

5) نعتبر النقط: $A(-1;1;3)$ ، $B(2;1;0)$ و $C(4;-1;5)$.

يمكن اعتبار النقطة C كمرجح للنقطتين A و B.

الحل:

1) صحيح

نسمي (D) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases} x=t+2 \\ y=-2t \\ z=3t-1 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

$\vec{u}(1;-2;3)$ هو شعاع توجيه لهذا المستقيم.

ونسمي (P) المستوي الذي معادلة له: $x+2y+z-3=0$

$\vec{n}(1;2;1)$ هو شعاع ناظمي لهذا المستوي.

لدينا: $\vec{u}.\vec{v}=1\times1+(-2)\times2+3\times1=0$ ومنه: $\vec{u}\perp\vec{v}$

نستنتج أن المستقيم (D) يوازي المستوي (P).

❖ طريقة أخرى:

لنبحث عن نقط تقاطع (D) و (P) وذلك بحل الجملة: $\begin{cases} x=t+2 \\ y=-2t \\ z=3t-1 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$

عند حل المعادلة $(t+2)+2(-2t)+(3t-1)=3$ بحثا عن t نجد: $1=3$

وهذا مستحيل. نستنتج أن المستقيم (D) والمستوي (P) ليس لهما نقطا مشتركة.

إذن: المستقيم (D) يوازي المستوي (P).

2) خاطئ

للبحث عن نقط تقاطع المستويات (P) ، (P') و (P'') نقوم بحل الجملة:

$\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 2x+3y-2z=6 \\ 4x-y+4z=12 \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} x=2y-3z+3 \\ 2(2y-3z+3)+3y-2z=6 \\ 4(2y-3z+3)-y+4z=12 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} x=2y-3z+3 \\ 7y-8z=0 \\ 7y-8z=0 \end{cases}$ وأخيرا نحصل على الجملة: $\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 7y-8z=0 \end{cases}$

تمثل هذه الجملة الأخيرة تقاطع مستويين في الفضاء (المستقيم في الفضاء معرّف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين).

إذن: للمستويات (P) ، (P') و (P'') مستقيم مشترك.

3) صحيح

ليكن (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=-3t+2 \\ y=t+1 \\ z=2t-3 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

وليكن (D') المستقيم الذي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=2t'+7 \\ y=2t'+2 \\ z=-t'-6 \end{cases} \quad (t'\in\mathbb{R})$

للبحث عن نقط تقاطع المستقيمين (D) و (D') ، نقوم بحل الجملة:

$\begin{cases} -3t+2=2t'+7 \\ t+1=2t'+2 \\ 2t-3=-t'-6 \end{cases}$. من المعادلتين الأولى والثانية لهذه الجملة نجد:

$t=-1$ و $t'=-1$ وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة الثالثة نحصل على $-5=-5$

وهي محققة دوما. نستنتج أن المستقيمين (D) و (D') متقاطعان ونقطة تقاطعهما هي $A(5;0;-5)$.

إذن: المستقيمان (D) و (D') متقاطعان.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(2;4;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(4;-4;-4)$

واضح أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ وهذا يعني أن النقط A، B وَ C ليست في استقامية ، فهي تعيّن مستويا (ABC).

من جهة أخرى: $A\in(ABC)$ لأن $1=2+1-$،

$B\in(ABC)$ لأن $1=0+1$ و $C\in(ABC)$ لأن $1=3-2$

أي أن إحداثيات كل من النقط A، B وَ C تحقق المعادلة $x+z=1$.

إذن: $x+z=1$ هي معادلة للمستوي (ABC).

5) خاطئ

تذكير: C مرجح النقطتين A و B معناه: النقط A، B وَ C في استقامية .

لدينا: $\overrightarrow{CA}(-3;2;-2)$ و $\overrightarrow{CB}(-2;2;-5)$.

واضح أن الشعاعين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ غير مرتبطين خطيا لأنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{CA}=k\overrightarrow{CB}$ وهذا يعني أن النقط A، B وَ C ليست في استقامية.

نستنتج أنه لا يمكن اعتبار النقطة C كمرجح للنقطتين A و B.

التمرين 3:

(Bac Nouvelle Calédonie Mars 2009 S)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(4;0;0)$، $B(0;2;0)$، $C(0;0;3)$ و $E\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{9}\right)$.

1) أ- أثبت أن النقط A، B وَ C تعيّن مستويا.

ب- ليكن $\vec{n}$ الشعاع الذي إحداثياته $(3;6;4)$.

- بيّن أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

جـ- بيّن أن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي: $3x+6y+4z-12=0$.

د- استنتج المسافة بين النقطة E والمستوي (ABC).

2) أ- بيّن أن المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=t+1\\y=2t\\z=\frac{4}{3}t+\frac{5}{9}\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

عمودي على المستوي (ABC) ويمرّ بالنقطة E.

ب- عيّن إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (ABC).

جـ- استنتج المسافة بين النقطة E والمستوي (ABC).

الحل:

1) أ- إثبات أن النقط A، B وَ C تعيّن مستويا:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-4;2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-4;0;3)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي فإن النقط A، B وَ C ليست في استقامية، فهي تعيّن مستويا (ABC).

ب- تبيان أن الشعاع $\vec{n}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC):

لدينا: $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=3\times(-4)+6\times2+4\times0=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=3\times(-4)+6\times0+4\times3=0$

نستنتج أن الشعاع $\vec{n}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

جـ- تبيان أن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x+6y+4z-12=0$:

طريقة 1: لدينا: $\vec{n}(3;6;4)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) وبالتالي فإن معادلته من الشكل: $3x+6y+4z+d=0$ حيث d عدد حقيقي.

ولدينا: $A\in(ABC)$ وبالتالي: $3\times4+6\times0+4\times0+d=0$ ومنه: $d=-12$

إذن: $3x+6y+4z-12=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

طريقة 2: بما أن النقط A، B وَ C ليست في استقامية ، فلكي نبيّن أن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x+6y+4z-12=0$ ، يكفي التحقق أن إحداثيات كل من النقط A، B وَ C تحقق المعادلة $3x+6y+4z-12=0$.

د- استنتاج المسافة بين النقطة E والمستوي (ABC):

تذكير: المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث:

$$d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ومنه: $d(E;(ABC))=\dfrac{\left|3\times\frac{2}{3}-6\times\frac{2}{3}+4\times\frac{1}{9}-12\right|}{\sqrt{3^2+6^2+4^2}}=\frac{2}{9}\sqrt{61}$

2) أ- تبيان أن المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=t+1\\y=2t\\z=\frac{4}{3}t+\frac{5}{9}\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

عمودي على المستوي (ABC) ويمرّ بالنقطة E:

لدينا: $\vec{u}\left(1;2;\frac{4}{3}\right)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\vec{n}(3;6;4)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)، ونلاحظ أن: $\vec{n}=3\vec{u}$ وبالتالي فإن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا وهذا يعني أن الشعاع $\vec{n}$ هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم (D)

نستنتج أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC).

○ التحقق أن المستقيم (D) يمرّ بالنقطة E:

لدينا: $E\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{9}\right)$ و $(D):\begin{cases}x=t+1\\y=2t\\z=\frac{4}{3}t+\frac{5}{9}\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

من الجملة: $\begin{cases}\frac{2}{3}=t+1\\-\frac{2}{3}=2t\\\frac{1}{9}=\frac{4}{3}t+\frac{5}{9}\end{cases}$ نجد: $\begin{cases}t=-\frac{1}{3}\\t=-\frac{1}{3}\\t=-\frac{1}{3}\end{cases}$ نستنتج أن (D) يمرّ بالنقطة E

ب- تعيين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (ABC):

إحداثيات النقطة H هي حل للجملة: $\begin{cases}x=t+1\\y=2t\\z=\frac{4}{3}t+\frac{5}{9}\\3x+6y+4z-17=0\end{cases}$

ومنه: $t=\frac{1}{3}$ وبالتعويض نجد: $H\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};1\right)$

استنتاج بُعد النقطة H عن المستوي (ABC):

المسافة بين النقطة H والمستوي (ABC) تساوي EH.

تذكير: المسافة بين النقطتين $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ هي:

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

ومنه: $EH=\sqrt{(x_H-x_E)^2+(y_H-y_E)^2+(z_H-z_E)^2}=\frac{2}{9}\sqrt{61}$

التمرين 4:

(نموذج تجريبي لبكالوريا الجزائر 2008)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بالمعادلتين $x+y+2z=1$ ، $x+y+z-1=0$ على الترتيب.

عيّن، في كل حالة مما يلي، النتيجة الصحيحة أو النتائج الصحيحة مع التبرير.

❶ إحداثيات نقطتين A و B مشتركتين بين المستويين (P_1) و (P_2) هي:

أ) $(1;2;3)$ ب) $(1;0;0)$ جـ) $(0;1;0)$

❷ إحداثيات شعاع توجيه المستقيم (D) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) هي:

أ) $(0;2;3)$ ب) $(1;-1;0)$ جـ) $(1;1;3)$

❸ λ عدد حقيقي. تمثيل وسيطي للمستقيم (D) هو:

أ) $\begin{cases}x=1+\lambda\\y=-\lambda\\z=0\end{cases}$ ب) $\begin{cases}x=\lambda\\y=1-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$ جـ) $\begin{cases}x=1+\lambda\\y=2-\lambda\\z=3+\lambda\end{cases}$

الحل:

❶ إحداثيات نقطتين A و B مشتركتين بين المستويين (P_1) و (P_2) هي:

ب) $(1;0;0)$ جـ) $(0;1;0)$

التبرير: الإحداثيات $(1;0;0)$ تحقق معادلة (P_1) وتحقق معادلة (P_2).

الإحداثيات $(0;1;0)$ تحقق معادلة (P_1) وتحقق معادلة (P_2).

الإحداثيات $(3;2;1)$ لا تحقق معادلة (P_1) ولا تحقق معادلة (P_2).

❷ إحداثيات شعاع توجيه المستقيم (D) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) هي:

ب) $(1;-1;0)$

التبرير: بما أن النقطتين $A(0;1;0)$ و $B(1;0;0)$ مشتركتان بين المستويين (P_1) و (P_2) فإن $\overrightarrow{AB}(1;-1;0)$ شعاع توجيه للمستقيم (D).

❸ تمثيل وسيطي للمستقيم (D) هو: أ) $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=0 \end{cases}$

التبرير: المستقيم (D) يشمل النقطة $B(1;0;0)$ و $\overrightarrow{AB}(1;-1;0)$ شعاع توجيه له

تكون M نقطة من (D) إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطين خطيا

وهذا يعني وجود عدد حقيقي λ بحيث $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ ومنه التمثيل الوسيطي أ)

التمرين 5:

(Bac Pondichéry Avril 2007)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(3;2;6)$، $B(1;2;4)$ و $C(4;-2;5)$. وليكن (p) المستوي الذي معادلته: $2x+y-2z+4=0$.

❶ تحقق أن النقط A، B و C تعيّن مستويا، وأن هذا المستوي هو (p).

❷ أ- أثبت أن المثلث ABC قائم.

ب- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة O والعمودي على (p).

جـ- لتكن K المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (p). احسب المسافة OK.

د- احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

❸ نعتبر في هذا السؤال الجملة المثقلة $\{(O,3);(A,1);(B,1);(C,1)\}$.

أ- تحقق أن هذه الجملة تقبل مرجحا نرمز له بـ G.

ب- نسمي I مركز ثقل المثلث ABC. أثبت أن النقطة G تنتمي إلى المستقيم (OI).

جـ- احسب بُعد النقطة G عن المستوي (p).

❹ لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

$$\left\| 3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} \right\|=5$$

أ- حدّد المجموعة (Γ).

ب- ما هي طبيعة مجموعة النقط المشتركة بين (Γ) و (p) ؟

الحل:

❶ التحقق أن النقط A، B وَ C تعيّن مستويا:

تذكير: النقط A، B وَ C تعيّن مستويا إذا وفقط إذا كانت هذه النقط ليست في استقامية، وهذا يعني: الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

○ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا يعني وجود عدد حقيقي k حيث: $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2;0;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-4;-1)$ نستنتج أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا: $\frac{-2}{1}\neq\frac{0}{-4}$.

إذن: النقط A، B وَ C ليست في استقامية وبالتالي فهي تعيّن مستويا (ABC).

○ التحقق أن $(ABC)=(p)$:

يكون المستوي المعيّن بالنقط A، B وَ C هو المستوي (p) إذا وفقط إذا كانت هذه النقط تنتمي إلى المستوي (p) أي إحداثيات النقط تحقق معادلة المستوي (p).

مثلا: $A\in(P)$ لأن: $2\times3+1\times2-2\times6+4=12-12=0$

نفس الطريقة بالنسبة للنقطتين B و C.

❷ أ- إثبات أن المثلث ABC قائم:

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2)\times1+0\times(-4)+(-2)(-1)=0$ ومنه: $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

نستنتج أن المثلث ABC قائم في النقطة A.

ب- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ):

المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (p) ، $\vec{n}(2;1;-2)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (p) وبالتالي فإن $\vec{n}(2;1;-2)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

تكون M نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{OM}$ مرتبطين خطيا

وهذا يعني وجود عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{OM}=t\vec{n}$

ومنه التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

جـ- حساب المسافة OK:

تذكير: في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، المسافة بين النقطة $O(x_0\,;y_0\,;z_0)$ والمستوي الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب: $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ومنه: $OK=d(O;(p))=\dfrac{|2x_0+y_0-2z_0+4|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{4}{3}$

د- حساب حجم رباعي الوجوه $OABC$:

حجم رباعي الوجوه $OABC$ يعطى بالعلاقة $V=\dfrac{S\times h}{3}$. بما أن OK هو ارتفاع في المثلث ABC أي $h=OK=\dfrac{4}{3}$ فإن $V=\dfrac{4S}{9}$ حيث S هي مساحة المثلث ABC . وبما أن المثلث ABC قائم في A فإن $S=\dfrac{AB\times AC}{2}$

لدينا: $AB=\sqrt{4+0+4}=2\sqrt{2}$ و $AC=\sqrt{1+16+1}=3\sqrt{2}$

ومنه: $S=6$. إذن: $V=\dfrac{4\times6}{9}=\dfrac{8}{3}$

3 أ- التحقق أن الجملة تقبل مرجحا:

بما أن مجموع المعاملات غير معدوم $(6 \neq 0)$ فإن الجملة المعطاة تقبل مرجحا نرمز إليه بالرمز G.

ب- إثبات أن النقطة G تنتمي إلى المستقيم (OI): النقطة I هي مركز ثقل المثلث ABC أي I مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$.

وحسب خواص المرجح يمكن استبدال النقط A، B وَ C بالنقطة I شرط أن نرفق بالنقطة I مجموع المعاملات المرفقة بالنقط A، B وَ C.

نستنتج أن النقطة G هي أيضا مرجح الجملة المثقلة:

$\{(O,3);(I,3)\}$، ومن خواص مرجح نقطتين نستنتج أن النقطة G تنتمي إلى المستقيم (OI) ولأن المعاملين متساويان فإن G هي منتصف القطعة $[OI]$.

جـ- حساب بُعد النقطة G عن المستوي (p):

نعلم أن G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(O,3);(A,1);(B,1);(C,1)\}$

$$\text{ومنه: } \begin{cases} x_G = \dfrac{3x_O + x_A + x_B + x_C}{6} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \\ y_G = \dfrac{3y_O + y_A + y_B + y_C}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ z_G = \dfrac{3z_O + z_A + z_B + z_C}{6} = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{وبالتالي: } d(G;(p)) = \frac{|2x_G + y_G - 2z_G + 4|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}$$

4 أ- تحديد المجموعة (Γ):

لدينا: $\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5$ ومنه: $\|(3+1+1+1)\overrightarrow{MG}\| = 5$

أخيرا: $GM = \dfrac{5}{6}$

إذن: المجموعة (Γ) هي سطح الكرة التي مركزها النقطة G ونصف قطرها $\dfrac{5}{6}$

ب- طبيعة مجموعة النقط المشتركة بين (Γ) و (p):

لدينا: $d(G;(p))<\frac{5}{6}$ أي: $\frac{2}{3}<\frac{5}{6}$ نستنتج أن المجموعة $(p)\cap(\Gamma)$ هي دائرة .

التمرين 6:

(Bac Nouvelle-Calédonie Mars 2007)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

❶ سؤال على الدرس:

بيّن كيفية كتابة معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل نقطة $A(x_0\,,y_0\,,z_0)$ و $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ شعاع ناظمي له.

❷ نعتبر النقط: $A(1;2;-3)$ ، $B(-3;1;4)$ وَ $C(2;6;-1)$.

أ- أثبت أن النقط A ، B وَ C تعيّن مستويا (ABC).

ب- تحقق أن معادلة المستوي (ABC) هي: $2x-y+z+3=0$.

جـ- لتكن I النقطة التي إحداثياتها $(4\,;9\,;-5)$. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة I والعمودي على المستوي (ABC).

د- عيّن إحداثيات J نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوي (ABC).

هـ- استنتج بُعد النقطة I عن المستوي (ABC).

الحل:

❶ كيفية كتابة معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل نقطة $A(x_0\,,y_0\,,z_0)$ و $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ شعاع ناظمي له:

تذكير: مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ هي المستوي (p) الذي يشمل النقطة $A(x_0\,,y_0\,,z_0)$ و $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ شعاع ناظمي له.

إذا كانت $(x\,,y\,,z)$ إحداثيات النقطة M فإن $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}$ وبالتالي:

$M \in (p)$ يكافئ $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$

ومن التعريف التحليلي للجداء السلمي نجد: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

وبعد التبسيط نحصل على: $ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$

وبوضع: $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$ تصبح معادلة المستوي (p) من الشكل:

$$ax+by+cz+d=0$$

❷ أ- إثبات أن النقط A ، B وَ C تعيّن مستويا:

تذكير: النقط A ، B وَ C تعيّن مستويا إذا وفقط إذا كانت هذه النقط ليست في استقامية ، وهذا يعني : الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

○ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا يعني وجود عدد حقيقي k حيث: $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-4;-1;7)$ و $\overrightarrow{AC}(1;4;2)$ وبالتالي فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا: $\frac{-4}{1} \neq \frac{-1}{4}$.

إذن: النقط A ، B وَ C ليست في استقامية فهي تعيّن مستويا (ABC).

ب- التحقق أن معادلة المستوي (ABC) هي $2x-y+z+3=0$:

○ للتحقق أن معادلة المستوي (ABC) هي $2x-y+z+3=0$ ، يكفي تعويض إحداثيات كل نقطة من النقط A ، B وَ C في المعادلة $2x-y+z+3=0$.

(إحداثيات النقط A، B وَ C تحقق المعادلة $2x-y+z+3=0$)

○ ثلاث نقط ليست في استقامية تعيّن مستوى واحد.

جـ- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (D):

لدينا $\vec{n}(2;-1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) وبالتالي فإن $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D).

(D) يشمل I وعمودي على (ABC) أي (D) يشمل I وموجه بالشعاع $\vec{n}$

تكون M نقطة من (D) إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{IM}$ مرتبطين خطيا

وهذا يعني وجود عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{IM}=t\overrightarrow{n}$

ومنه التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases}x=2t-5\\y=-t+9\\z=t+4\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

د- تعيين إحداثيات J نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوي (ABC):

النقطة J موجودة لأن (D) عمودي على (ABC) ، وبالتالي إحداثيات النقطة J تحقق معادلة المستوي (ABC) وتحقق التمثيل الوسيطي للمستقيم (D).

ومنه: $\begin{cases}2x-y+z+3=0\\x=2t-5\\y=-t+9\\z=t+4\end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases}2(2t-5)-(-t+9)+(t+4)+3=0\\x=2t-5\\y=-t+9\\z=t+4\end{cases}$

نجد: $t=2$، وبالتعويض في الجملة $\begin{cases}x=2t-5\\y=-t+9\\z=t+4\end{cases}$ نحصل على: $\begin{cases}x=-1\\y=7\\z=6\end{cases}$

إذن: $J(-1;7;6)$

هـ- استنتاج بُعد النقطة I عن المستوي (ABC):

بُعد النقطة I عن المستوي (ABC) هو المسافة $IJ=2\sqrt{6}$

التمرين 7:

(Bac Polynésie juin 2007)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقطتين: $A\left(\frac{2}{3};-3;2\right)$ ، $B\left(-\frac{4}{3};0;-4\right)$. نسمي I منتصف القطعة $[AB]$ و (S) سطح الكرة التي قطرها $[AB]$.

1 لتكن E مرجحا للجملة المثقلة $\{(A,2);(B,1)\}$.

أ- احسب إحداثيات النقطة E.

ب- برهن أن المجموعة (p) للنقط M من الفضاء حيث:

$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=3\|\overrightarrow{MO}\|$ هي المستوي المحوري للقطعة $[OE]$.

جـ- بيّن أن معادلة (p) هي: $y=-1$.

❷ أ- احسب نصف قطر (S)، وبُعد المركز I عن المستوي (p).

استنتج أن مجموعة نقط تقاطع (p) و (S) هي مجموعة (c) غير خالية.

ب- أثبت أن معادلة (c) في المستوي (p) هي: $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$.

استنتج أن (c) دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

❸ لتكن D النقطة التي إحداثياتها $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};4\sqrt{3}-1\right)$.

أ- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (ID).

ب- استنتج أن المستقيم (ID) يقطع الدائرة (c) في نقطة F يطلب تعيين إحداثياتها.

الحل:

❶ أ- حساب إحداثيات النقطة E:

تذكير: إذا كانت النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\ ،\ y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\ \text{و}\ z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$$

إذن: $x_E=\frac{2x_A+x_B}{2+1}=0$ ، $y_E=\frac{2y_A+y_B}{2+1}=-2$ و $z_E=\frac{2z_A+z_B}{2+1}=0$

ب- البرهان أن (p) هي المستوي المحوري للقطعة $[OE]$:

تذكير: إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$، فإنه من أجل كل نقطة M من الفضاء: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

ومنه: $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{ME}$ تصبح العلاقة $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=3\|\overrightarrow{MO}\|$

كما يلي: $ME=MO$

إذن: (p) هو المستوي المحوري للقطعة $[OE]$.

جـ- إثبات أن معادلة (p) هي $y=-1$:

لدينا: $M \in (p)$ يعني $ME = MO$ ومنه: $EM^2 = OM^2$

وبالتالي: $(x-0)^2+(y+2)^2+(z-0)^2 = x^2+y^2+z^2$

وبعد التبسيط نجد: $y=-1$

إذن: معادلة للمستوي (p) هي $y=-1$.

❷ أ- حساب نصف قطر سطح الكرة (S):

نصف قطر (S) هو: $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{4+9+36} = \frac{7}{2}$

حساب بُعد المركز I عن المستوي (p):

تذكير: في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، المسافة بين النقطة $I(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ والمستوي الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب: $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

○ إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$ هي: $\left(-\frac{1}{3};-\frac{3}{2};-1\right)$ ، وبالتالي فإن المسافة بين النقطة I والمستوي (p) هي: $\frac{\left|-\frac{3}{2}+1\right|}{1} = \frac{1}{2}$.

○ استنتاج أن المجموعة (c) غير خالية:

○ بما أن بُعد I عن (p) أصغر من نصف قطر (S) أي: $\frac{1}{2} < \frac{7}{2}$ فإن (c) غير خالية (المجموعة (c) دائرة) .

ب- إثبات أن معادلة (c) في المستوي (p) هي $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2 = 12$:

البحث عن نقط تقاطع (p) و (S) يؤول إلى حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z+1)^2 = \frac{49}{4} \\ y=-1 \end{cases}$$ ومنه: $$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2 = 12 \\ y=-1 \end{cases}$$

ن: معادلة (c) في المستوي (p) هي: $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$.

○ استنتاج أن (c) دائرة: في المستوي (p)، $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$ هي معادلة دائرة مركزها النقطة $H\left(-\frac{1}{3};-1;-1\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

❸ - تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (ID):

تكون M نقطة من (ID) إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{IM}$ و $\overrightarrow{ID}$ مرتبطين خطيا

وهذا يعني وجود عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{IM}=t\overrightarrow{ID}$

ومنه: $\begin{cases} x+\frac{1}{3}=0\times t \\ y+\frac{3}{2}=1\times t \\ z+1=4\sqrt{3}\times t \end{cases}$ إذن: $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=t-\frac{3}{2} \\ z=4\sqrt{3}t-1 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

ب- استنتاج أن المستقيم (ID) يقطع الدائرة (c) في نقطة F:

F نقطة مشتركة بين المستقيم (D) و الدائرة (c) وبالتعويض في معادلة (c) نجد:

$\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+(t+1)^2=12$ وبحل هذه المعادلة نحصل على: $t=-\frac{1}{2}$ أو $t=\frac{1}{2}$

من أجل $t=-\frac{1}{2}$: $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2 \\ z=4\sqrt{3}\times\frac{-1}{2}-1=-2\sqrt{3}-1 \end{cases}$

النقطة التي إحداثياتها $\left(-\frac{1}{3};-2;-2\sqrt{3}-1\right)$ لا تحقق معادلة المستوي (p)

وبالتالي فإن هذه النقطة مرفوضة.

من أجل $t=\frac{1}{2}$: $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1 \\ z=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}-1=2\sqrt{3}-1 \end{cases}$

النقطة التي إحداثياتها $\left(-\frac{1}{3};-1;2\sqrt{3}-1\right)$ تحقق معادلة المستوي (p)

إذن: $F\left(-\frac{1}{3};-1;2\sqrt{3}-1\right)$

التمرين 8:

Bac Antilles Guyane juin 2007

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقطتين $A(3;0;6)$ وَ $I(0;0;6)$. وليكن (D) المستقيم المار بالنقطتين A و I .

نسمي (p) المستوي الذي معادلته: $2y+z-6=0$ ، (Q) المستوي الذي معادلته:

$y-2z+12=0$

1. أثبت أن المستويين (p) و (Q) متعامدان.
2. بيّن أن تقاطع المستويين (p) و (Q) هو المستقيم (D).
3. أثبت أن المستويين (p) و (Q) يقطعان المحور $(O;\vec{j})$ وعيّن إحداثيات كل من النقطتين B وَ C ، تقاطع على الترتيب (p) و (Q) مع المحور $(O;\vec{j})$.
4. بيّن أن معادلة ديكارتية للمستوي (T) المار بالنقطة B و $\vec{AC}$ شعاع ناظمي له هي: $x+4y+2z-12=0$.
5. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OA). أثبت أن المستقيم (OA) والمستوي (T) يتقاطعان في نقطة H يطلب تعيين إحداثياتها.
6. ماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC ؟ علل.

الحل:

1. إثبات أن المستويين (p) و (Q) متعامدان:

لدينا: $\vec{n}_1(0;2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (p) ،

$\vec{n}_2(0;1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q)

ولدينا: $\vec{n}_1.\vec{n}_2=0\times0+2\times1+1\times(-2)=2-2=0$ ومنه: $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$

إذن: $(P)\perp(Q)$

❷ إثبات أن المستويين (p) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (D):

إحداثيات النقطة A تحقق معادلة (p) و تحقق معادلة (Q)

إحداثيات النقطة I تحقق معادلة (p) وتحقق معادلة (Q)

وبالتالي فإن المستويين (p) و (Q) لهما نقطتين مشتركتين هما A و I ، نستنتج أن المستويين (p) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (AI) أي المستقيم (D).

❸ إثبات أن المستويين (p) و (Q) يقطعان المحور $(O;\vec{j})$ في B و C:

المحور $(O;\vec{j})$ معرف بالمعادلة بـ $x=0$ و $z=0$.

بتعويض $z=0$ في معادلة المستوي (p) نجد: $2y-6=0$ ومنه: $y=3$

بتعويض $z=0$ في معادلة المستوي (Q) نجد: $y+12=0$ ومنه: $y=-12$

إذن: المستويان (p) و (Q) يقطعان المحور $(O;\vec{j})$ على الترتيب في النقطتين $B(0;3;0)$ و $C(0;-12;0)$.

❹ إثبات أن معادلة المستوي (T) هي $x+4y+2z-12=0$:

$\overrightarrow{AC}(-3;-12;-6)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (T) وبالتالي فإن معادلته من الشكل:

$-3x-12y-6z+\alpha=0$

النقطة $B(0;3;0)$ تنتمي إلى (T) ومنه: $-3(0)-12(3)-6(0)+\alpha=0$

وبالتالي: $\alpha=36$

تصبح معادلة (T) كما يلي: $-3x-12y-6z+36=0$

وبقسمة الطرفين على -3 نحصل على المعادلة: $x+4y+2z-12=0$

إذن : معادلة للمستوي (T) هي $x+4y+2z-12=0$.

❺ كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (OA):

المستقيم (OA) يشمل النقطة O ويوازي الشعاع $\overrightarrow{OA}(3;0;6)$ ومنه التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=3t \\ y=0 \\ z=6t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

○ إثبات أن $(OA)\cap(T)=\{H\}$:

بحل الجملة: $\begin{cases} x+4y+2z-12=0 \\ x=3t \\ y=0 \\ z=6t \end{cases}$ نجد: $t=\frac{4}{5}$ إذن: $H\left(\frac{12}{5};0;\frac{24}{5}\right)$

❻ ماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC؟

لدينا: $H\in(OA)$ و $O\in(BC)$ نستنتج أن: $H\in(ABC)$

ولدينا: $H\in(T)$ وبالتالي فإن المستقيم (BH) عمودي على المستقيم (AC)

نستنتج أن (BH) ارتفاع للمثلث ABC.

التحقق أن (AH) ارتفاع ثاني للمثلث ABC:

لدينا: $\overrightarrow{AH}\left(-\frac{3}{5};0;-\frac{6}{5}\right)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-15;0)$ ومنه: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

وبالتالي: $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ نستنتج أن (AH) ارتفاع للمثلث ABC.

الارتفاعان (BH) و (AH) يتقاطعان في النقطة H ، نستنتج أن H هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث ABC.

التمرين 9:

Bac France juin 2007

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ليكن (p_1) المستوي الذي معادلته: $x+2y-z+1=0$ ، (p_2) المستوي الذي معادلته: $-x+y+z=0$ ، ولتكن A النقطة التي إحداثياتها $(0;1;1)$.

❶ أثبت أن (p_1) وَ (p_2) متعامدان.

❷ ليكن (d) مستقيما تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=t-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

أثبت أن المستويين (p_1) وَ (p_2) يتقاطعان ضمن المستقيم (d).

❸ احسب المسافة بين النقطة A وكل من المستويين (P_1) وَ (P_2).

❹ استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (d).

الحل:

❶ إثبات أن (P_1) وَ (P_2) متعامدان:

إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ شعاعين ناظميين للمستويين (P_1) وَ (P_2) على الترتيب فإن

$\vec{n_1}\ (1;2;-1)$ و $\vec{n_2}\ (-1;1;1)$.

$(P_1)\perp(P_2)$ معناه $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$

لدينا: $1\times(-1)+2\times1+(-1)\times1=2-2=0$ نستنتج أن: $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$

إذن: $(P_1)\perp(P_2)$

❷ إثبات أن $(P_1)\cap(P_2)=(d)$:

نعوض إحداثيات نقطة كيفية من (d) في معادلة (P_1):

لدينا: $\left(t-\frac{1}{3}\right)+2\left(-\frac{1}{3}\right)-t+1=\dots=0$ ، نستنتج أن $(d)\subset(P_1)$ ...(1)

نعوض إحداثيات نقطة كيفية من (d) في معادلة (P_2):

لدينا: $-\left(t-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+(t)=\dots=0$ ، نستنتج أن $(d)\subset(P_2)$ ...(2)

من (1) و (2) نستنتج أن $(P_1)\cap(P_2)=(d)$.

❸ حساب المسافة بين النقطة A والمستوي (P_1):

تذكير: في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، المسافة بين النقطة $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ والمستوي الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب: $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

وبالتالي فإن المسافة بين النقطة $A(0;1;1)$ والمستوي (P_1) هي:

$$\frac{|1\times0+2\times1-1\times1+1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

وبنفس الطريقة نجد المسافة بين النقطة $A(0;1;1)$ والمستوي (P_2) تساوي $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

❹ استنتاج المسافة بين النقطة A والمستقيم (d):

نعلم أن (P_1)، (P_2) متعامدان و (d) مستقيم تقاطعهما . النقطة A لا تنتمي إلى (P_1) ولا تنتمي إلى (P_2).

المسافة بين النقطة A والمستقيم (d) هي الطول AH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (d).

لتكن A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_2) ، وبالتالي فإن المثلث $AA'H$ قائم في A' ، وحسب مبرهنة فيثاغورث:

$$[d(A;(d))]^2=AH^2=[d(A;P_1)]^2+[d(A;P_2)]^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=2$$

إذن: $d(A;(d))=\sqrt{2}$

التمرين 10:

Bac Liban juin 2007

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر المستقيم (d) المعرف بتمثيله الوسيطي:

$$\begin{cases} x=2-\frac{1}{2}t \\ y=1 \\ z=5-\frac{3}{2}t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

نسمي A النقطة التي إحداثياتها $(2;-1;1)$ ، B النقطة التي إحداثياتها $(4;-2;2)$ و C النقطة من (d) ذات الفاصلة 1.

أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل:

❶ المستقيم (d) يوازي المحور $(O;\vec{j})$.

❷ المستوي (p) الذي معادلته $x+3z-5=0$ يمرّ بالنقطة A وعمودي على (d).

❸ قيس الزاوية الهندسية $\widehat{BAC}$ هو $\frac{\pi}{3}\,rad$.

❹ لتكن G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A;-1),(B;1),(C;1)\}$.

للقطعتين $[AG]$ و $[BC]$ نفس المنتصف.

❺ سطح الكرة (S) التي مركزها C والمارّة بالنقطة B تقطع المستوي (p) الذي معادلته $x+3z-5=0$.

الحل:

❶ خاطئ.

$\vec{u}\left(-\frac{1}{2};0;-\frac{3}{2}\right)$ شعاع توجيه للمستقيم (d) و $\vec{j}(0;1;0)$ شعاع توجيه $(O;\vec{j})$

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{j}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي (d) لا يوازي المحور $(O;\vec{j})$.

❷ صحيح.

$\vec{u}\left(-\frac{1}{2};0;-\frac{3}{2}\right)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (d) وبالتالي فهو شعاع ناظمي لـ (p)

نستنتج أن المستوي (p) معرف بمعادلة من الشكل $-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}z+\alpha=0$

وبما أن $A\in(P)$ فإن $-\frac{1}{2}\times 2-\frac{3}{2}\times 1+\alpha=0$ ومنه: $\alpha=\frac{5}{2}$

إذن: معادلة المستوي (p) هي: $-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}z+\frac{5}{2}=0$ وبضرب الطرفين في العدد -2 نحصل على المعادلة: $x+3z-5=0$

❸ خاطئ.

لدينا: $A(2;-1;1)$ ، $B(4;-2;2)$.

C النقطة من (d) ذات الفاصلة 1 ومنه: $t=2$ أي: $1=2-\frac{1}{2}t$

نستنتج أن إحداثيات النقطة C هي $(1;1;2)$.

لدينا: $AB^2=(4-2)^2+(-2+1)^2+(2-1)^2=6$

$AC^2=(1-2)^2+(1+1)^2+(2-1)^2=6$

استعمال الجداء السلمي:

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\widehat{BAC}$

ومنه: $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{2(-1)+(-1)\times2+1\times1}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{1}{2}$

نستنتج أن قيس الزاوية الهندسية $\widehat{BAC}$ هو $\dfrac{2\pi}{3}\,rad$ وليس $\dfrac{\pi}{3}\,rad$.

4 صحيح.

النقطة G معرفة بالعلاقة: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ومنه: $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}$ نستنتج أن: $x_G=\dfrac{-x_A+x_B+x_C}{-1+1+1}=3$،

$y_G=\dfrac{-y_A+y_B+y_C}{-1+1+1}=0$ و $z_G=\dfrac{-z_A+z_B+z_C}{-1+1+1}=3$. إذن: $G(3;0;3)$

تذكير: إذا كانت النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ فإن:

$x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ ، $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$ و $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$

نستنتج أن إحداثيات منتصف القطعة $[AG]$ هي $\left(2\;;\;-\dfrac{1}{2}\;;\;\dfrac{5}{2}\right)$ وأن إحداثيات منتصف القطعة $[BC]$ هي $\left(2\;;\;-\dfrac{1}{2}\;;\;\dfrac{5}{2}\right)$.

إذن: للقطعتين $[AG]$ و $[BC]$ نفس المنتصف $I\left(2\;;\;-\dfrac{1}{2}\;;\;\dfrac{5}{2}\right)$.

5 صحيح.

لدينا: $BC^2=(1-4)^2+(1+2)^2+(2-2)^2=18$ ومنه: $BC=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

حساب $d(C;(p))$ بُعد النقطة C عن المستوي (p):

لدينا: $d(C;(p))=\dfrac{|1\times1+3\times2-5|}{\sqrt{1+9}}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

بما أن بُعد المركز C عن المستوي (p) أقل من نصف قطر (S) أي $\dfrac{\sqrt{10}}{5}<3\sqrt{2}$

فإن سطح الكرة (S) تقطع المستوي (p).

التمرين 11:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، سطح الكرة (S) التي معادلتها: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$

والمستوي (p) الذي معادلته: $x-y+2z+1=0$

1. أثبت أن (S) سطح كرة مركزها النقطة $\Omega(1;2;3)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.
2. تحقق أن المستوي (p) مماس لسطح الكرة (S).
3. أ- حدّد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (p).

ب- حدّد إحداثيات ω نقطة تماس (p) و (S).

الحل:

1. إثبات أن (S) سطح كرة مركزها النقطة $\Omega(1;2;3)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$:

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$

ومنه: $(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2-6z)+8=0$

أخيرا: $(x^2-1)^2+(y^2-2)^2+(z^2-3)^2=6=(\sqrt{6})^2$

إذن: (S) هي سطح كرة مركزها النقطة $\Omega(1;2;3)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{6}$

2. التحقق أن المستوي (p) مماس لسطح الكرة (S):

بُعد المركز Ω عن المستوي (p) هو العدد $d(\Omega;(p))$ حيث:

$$d(\Omega;(p))=\frac{|x_\Omega-y_\Omega+2z_\Omega+1|}{\sqrt{1+1+4}}=\sqrt{6}$$

بما أن $d(\Omega;(p))=r=\sqrt{6}$ نستنتج أن المستوي (p) مماس لسطح الكرة (S).

3. أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ):

المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (p) و $\vec{n}(1;-1;2)$ شعاع ناظمي

للمستوي (p) وبالتالي $\vec{n}(1;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

تكون M نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ مرتبطين خطيا

وهذا يعني وجود عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{\Omega M} = t\vec{n}$

ومنه التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+2 \\ z = 2t+3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

ب- إحداثيات النقطة ω نقطة تماس (p) و (s) :

ω هي نقطة تماس (p) و (s) وبالتالي فإن ω هي نقطة تقاطع (p) و (Δ).

إحداثيات ω تحقق معادلة المستوي (p) وتحقق التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

ومنه: $\begin{cases} x-y+2z+1=0 \\ x=t+1 \\ y=-t+2 \\ z=2t+3 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} (t+1)-(-t+2)+2(2t+3)+1=0 \\ x=t+1 \\ y=-t+2 \\ z=2t+3 \end{cases}$

نستنتج أن: $t=-1$. إذن: $\omega(0;3;1)$

التمرين 12:

بكالوريا المغرب الدورة الاستدراكية 2007: علوم تجريبية

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2;0;-1)$، $B(2;4;2)$ وَ $C(3;3;3)$ وسطح الكرة (S) التي معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2-4x-4y-8z+20=0$$

❶ أثبت أن مركز سطح الكرة (S) هي النقطة $\Omega(2;2;4)$ وأن نصف قطرها 2.

❷ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (p) المار بالنقطة A والعمودي على (CB).

❸ أ- بيّن أن المستوي (p) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة (c) نصف قطرها 1.

ب- حدّد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (p) .

جـ- حدّد إحداثيات ω مركز الدائرة (c).

الحل:

❶ إثبات أن مركز (S) هي النقطة $\Omega(2;2;4)$ وأن نصف قطرها هو 2:

لدينا: $x^2+y^2+z^2-4x-4y-8z+20=0$

ومنه: $(x^2-4x)+(y^2-4y)+(z^2-8z)+20=0$

ومنه: $(x^2-2)^2-4+(y^2-2)^2-4+(z^2-4)^2-16+20=0$

أخيرا: $(x^2-2)^2+(y^2-2)^2+(z^2-4)^2=4=(2)^2$

إذن: مركز سطح الكرة (S) هي النقطة $\Omega(2;2;4)$ ونصف قطرها هو $R=2$.

❷ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (p):

المستوي (p) عمودي على المستقيم (CB) وبالتالي $\overrightarrow{CB}(-1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (p) نستنتج أن معادلة (p) من الشكل: $-x+y-z+\alpha=0$

النقطة $A(2;0;-1)$ تنتمي إلى (p) ومنه: $0=+\alpha+(-1)-(0)+(2)-$ نجد: $\alpha=1$

تصبح معادلة (p) كما يلي: $-x+y-z+1=0$

إذن : معادلة المستوي (p) هي: $-x+y-z+1=0$

❸ أ- إثبات أن (p) يقطع (S) وفق دائرة (c) نصف قطرها 1:

بُعد المركز Ω عن المستوي (p) هو العدد d حيث:

$$d=d(\Omega;(p))=\frac{|-x_\Omega+y_\Omega-z_\Omega+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}$$ ولدينا: $R=2$

بما أن $d(\Omega;(p))<R$ نستنتج أن (p) يقطع (S) وفق دائرة (c) نصف قطرها r

حيث: $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{(2)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$

ب- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (p):

المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (p) ، و $\overrightarrow{n}(-1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (p) وبالتالي $\overrightarrow{n}(-1;1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

تكون M نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{n}$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ مرتبطين خطيا وهذا يعني وجود عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{\Omega M}=t\overrightarrow{n}$.

ومنه التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases}x=-t+2\\y=t+2\\z=-t+4\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

جـ- إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة (c):

ω مركز الدائرة (c) هي نقطة تقاطع (p) و (Δ).

إحداثيات ω تحقق معادلة المستوي (p) وتحقق التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

لدينا: $\begin{cases} -x+y-z+1=0 \\ x=-t+2 \\ y=t+2 \\ z=-t+4 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} -(-t+2)+(t+2)-(-t+4)+1=0 \\ x=-t+2 \\ y=t+2 \\ z=-t+4 \end{cases}$

وعليه: $t=1$ وبالتالي: $x=1$ ، $y=3$ و $z=3$. إذن: $\omega(1;3;3)$

التمرين 13:

Bac Liban juin 2006

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ وَ $C(3;2;4)$.

1. أثبت أن النقط A ، B وَ C ليست في استقامية.

2. ليكن (d) مستقيما تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=2t-7 \\ y=-3t \\ z=t+4 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

أ- أثبت أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC).

ب- أعط معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3. لتكن H النقطة المشتركة بين المستقيم (d) والمستوي (ABC).

أ- أثبت أن H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$.

ب- عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ_1) للنقط M من الفضاء حيث:

$$(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$$

جـ- عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ_2) للنقط M من الفضاء حيث:

$$\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29}$$

د- حدّد الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $(\Gamma_1)\cap(\Gamma_2)$.

هـ- هل النقطة $S(-8;1;3)$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma_1)\cap(\Gamma_2)$؟

الحل:

❶ إثبات أن النقط A ، B وَ C ليست في استقامية:

للبرهان أن النقط A ، B وَ C ليست في استقامية يكفي أن نبرهن أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

تذكير: الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا يعني وجود عدد حقيقي k بحيث:

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-5;-2;4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ وبالتالي فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا: $\frac{-5}{1}\neq\frac{-2}{1}$.

إذن: النقط A ، B وَ C ليست في استقامية وبالتالي فهي تعيّن مستويا (ABC).

❷ أ- إثبات أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC):

$\vec{u}(2;-3;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (d).

حساب $\vec{u}.\overrightarrow{AB}$: $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=2(-5)+(-3)(-2)+1\times4=0$ ومنه: $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$

حساب $\vec{u}.\overrightarrow{AC}$: $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=2\times1+(-3)\times1+1\times1=0$ ومنه: $\vec{u}\perp\overrightarrow{AC}$

شعاع توجيه المستقيم (d) عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا للمستوي (ABC). نستنتج أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC).

ب- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):

بما أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC) و $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (d) فإن $\vec{u}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

وبالتالي معادلة (ABC) تكون من الشكل: $2x-3y+z+\alpha=0\cdots(E)$

لتعيين العدد الحقيقي α ، يكفي تعويض إحداثيات النقطة A في المعادلة (E) لأن $A\in(ABC)$. لدينا: $2\times2-3\times1+3+\alpha=0$ ومنه: $\alpha=-4$

إذن: معادلة المستوي (ABC) هي: $2x-3y+z-4=0$

❸ أ- إثبات أن H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$:

لدينا: H نقطة مشتركة بين (d) و (ABC) وبالتالي:

$2(2t-7)-3(-3t)+(t+4)-4=0$ ومنه: $t=1$

وبتعويض t بالعدد 1 في الجملة $\begin{cases} x=2t-7 \\ y=-3t \\ z=t+4 \end{cases}$ نجد: $H(-5;-3;5)$

○ حساب إحداثيات النقطة H' مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2);(B,-1);(C,2)\}$:

النقطة H' معرفة بالعلاقة: $-2\overrightarrow{H'A}-\overrightarrow{H'B}+2\overrightarrow{H'C}=\overrightarrow{0}$ – أو بالعلاقة:

$$\begin{cases} x_{H'}=-(-2x_A-x_B+2x_C)=-5 \\ y_{H'}=-(-2y_A-y_B+2y_C)=-3 \\ z_{H'}=-(-2z_A-z_B+2z_C)=5 \end{cases} \text{ ومنه: } \overrightarrow{OH'}=\frac{-2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{-2-1+2}$$

إذن: $H'(-5;-3;5)$

خلاصة: النقطتان H و H' منطبقتان وبالتالي فإن النقطة H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2);(B,-1);(C,2)\}$.

ب- تعيين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ_1):

لدينا: $(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0\ldots(1)$

ونعلم أن: $-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(-2-1+2)\overrightarrow{MH}=-\overrightarrow{MH}$

كذالك: $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB})-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$

تصبح العلاقة (1) كما يلي: $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{CB}=0$

إذن: (Γ_1) هي المستوي الذي يشمل النقطة H وعمودي على المستقيم (CB).

○ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Γ_1):

$\overrightarrow{CB}(6;3;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (Γ_1)، وبالتالي معادلة (Γ_1) من الشكل: $6x+3y-3z+\alpha=0$. ونعلم أن: $H\in(\Gamma_1)$

ومنه: $6(-5)+3(-3)-3\times5+\alpha=0$ أخيرا: $\alpha=54$

(Γ_1) هي المستوي الذي معادلته $6x+3y-3z+54=0$ وبقسمة الطرفين على3 تصبح معادلة المستوي (Γ_1): $2x+y-z+18=0$

جـ- تعيين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ_2):

لدينا: $\left[\ \left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}\ \right]$ يكافئ $\left[\ \left\|-\overrightarrow{MH}\right\|=\sqrt{29}\ \right]$

ومنه: $HM=\sqrt{29}$

إذن: (Γ_2) هي سطح الكرة التي مركزها النقطة H ونصف قطرها $\sqrt{29}$.

○ كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة (Γ_2): $(x+5)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=29$

د- تحديد الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $(\Gamma_2)\cap(\Gamma_1)$:

نقط تقاطع (Γ_1) و (Γ_2) هي دائرة لأن بُعد H عن (Γ_1) أقل من $\sqrt{29}$.

نستنتج أن: $(\Gamma_2)\cap(\Gamma_1)$ هي الدائرة التي مركزها النقطة H ونصف قطرها $\sqrt{29}$ الواقعة في المستوي (Γ_1).

هـ- هل النقطة $S(-8;1;3)$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma_2)\cap(\Gamma_1)$ ؟

نعوض إحداثيات النقطة S في معادلة المستوي (Γ_1):

لدينا: $2(-8)+1-3+18=0$ ومنه: $S\in(\Gamma_1)$

نعوض إحداثيات النقطة S في معادلة سطح الكرة (Γ_2):

لدينا: $(-8+5)^2+(1+3)^2+(3-5)^2=9+16+4=29$ ومنه: $S\in(\Gamma_2)$

خلاصة: $S\in(\Gamma_1)$ وَ $S\in(\Gamma_2)$ نستنتج أن $S\in(\Gamma_1)\cap(\Gamma_2)$

التمرين 14: Bac Polynésie septembre 2006

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ليكن (P_1) المستوي الذي معادلته: $-2x+y+z-6=0$ ، (P_2) المستوي الذي معادلته: $x-2y+4z-9=0$.

❶ أثبت أن (P_1) وَ (P_2) متعامدان .

❷ ليكن (D) مستقيم تقاطع (P_1) وَ (P_2).

أثبت أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو: $\begin{cases} x=2t-7 \\ y=3t-8 \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

❸ لتكن M نقطة كيفية من (D) ، ولتكن A النقطة التي إحداثياتها $(-9,-4,-1)$

أ- تحقق أن النقطة A لا تنتمي لا إلى (P_1) ولا إلى (P_2).

ب- اكتب AM^2 بدلالة t.

جـ- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(t)=2t^2-2t+3$

○ ادرس اتجاه تغير الدالة f.

○ من أجل أية نقطة M ، تكون المسافة AM أصغرية (صغرى)؟

فيما يلي نرمز لهذه النقطة بـ: I

○ عيّن إحداثيات النقطة I.

❹ ليكن (Q) المستوي الذي يشمل النقطة A والعمودي على (D).

أ- عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q).

ب- أثبت أن النقطة I هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D).

الحل:

❶ إثبات أن (P_1) وَ (P_2) متعامدان:

معادلة (P_1): $-2x+y+z-6=0$ وبالتالي $\vec{n_1}(-2;1;1)$ شعاع ناظمي له

معادلة (P_2): $x-2y+4z-9=0$ وبالتالي $\vec{n_2}(1;-2;4)$ شعاع ناظمي له

لدينا: $\vec{n_1}.\vec{n_2}=(-2)\times1+1\times(-2)+1\times4=0$ ومنه: $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$

إذن: (P_1) وَ (P_2) متعامدان.

❷ إثبات أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو: $\begin{cases} x=2t-7 \\ y=3t-8 \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

المستقيم (D) معرف بالجملة: $\begin{cases} -2x+y+z-6=0 \\ x-2y+4z-9=0 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} y=2x-z+6 \\ -3x+6z+21=0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} y=2x-z+6 \\ x-2(2x-z+6)+4z-9=0 \end{cases}$

وبالتالي: $\begin{cases} x=2z-7 \\ y=2(2z-7)-z+6 \end{cases}$ وأخيرا: $\begin{cases} x=2z-7 \\ y=3z-8 \end{cases}$

وبوضع $z=t$ تصبح الجملة الأخيرة كما يلي: $(t\in\mathbb{R})$ $(s)\ldots\begin{cases} x=2t-7 \\ y=3t-8 \\ z=t \end{cases}$

إذن : تمثل الجملة (s) تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

❸ أ- التحقق أن النقطة A لا تنتمي لا إلى (P_1) ولا إلى (P_2):

لدينا: $0\neq 6-1-4-18$ أي أن إحداثيات النقطة A لا تحقق معادلة (P_1).

و $0\neq -9-4+8+9$ أي أن إحداثيات النقطة A لا تحقق معادلة (P_2)

إذن : A لا تنتمي لا إلى (P_1) ولا إلى (P_2).

ب- كتابة AM^2 بدلالة t :

$$AM^2=(x+9)^2+(y+4)^2+(z+1)^2=(2t+2)^2+(3t-4)^2+(t+1)^2$$
$$=14t^2-14t+21=7\left(2t^2-2t+3\right)$$

جـ- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $f(t)=2t^2-2t+3$ ومنه: $f'(t)=4t-2$

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;\frac{1}{2}]$ ومتزايدة على المجال $[\frac{1}{2};+\infty[$

وتقبل قيمة صغرى من أجل $t=\frac{1}{2}$. عندئذ تكون المسافة AM أصغرية.

النقطة الموافقة لهذه القيمة الصغرى هي $I\left(-6\ ;\ \frac{13}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$

❹ أ- تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (Q):

$\vec{q}(2;3;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) وبالتالي فهو شعاع ناظمي لـ (Q)

نستنتج أن المستوي (Q) معرف بمعادلة من الشكل $2x+3y+z+\alpha=0$

وبما أن $A\in(Q)$ فإن $2-3-12-1+\alpha=0$ ومنه: $\alpha=31$

إذن: معادلة المستوي (Q) هي: $2x+3y+z+31=0$

ب- إثبات أن النقطة I هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D):

المثلث AMI قائم في النقطة I. طول الضلع $[AI]$ أصغر من طول الوتر $[AM]$

(المسافة AI أصغرية) ، وبالتالي فإن النقطة I هي المسقط العمودي للنقطة A

على المستقيم $(D)=(IM)$.

التمرين 15:

Bac France juin 2006

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ ، $D(1;0;-2)$ ، $E(3;2;-1)$

وَ $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$.

أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل:

1. معادلة للمستوي (ABC) هي: $2x+2y-z-11=0$.
2. النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة (D) على المستوي (ABC).
3. المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.
4. تمثيل وسيطي للمستقيم (CD) هو: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-1+t\\z=1-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$
5. النقطة I تنتمي إلى المستقيم (AB).

الحل:

1. معادلة للمستوي (ABC) هي: $2x+2y-z-11=0$ ← صحيح

إحداثيات كل نقطة من النقط A ، B وَ C تحقق المعادلة المعطاة.

2. النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة (D) على المستوي (ABC) ← خاطئ

إحداثيات النقطة E تحقق معادلة المستوي (ABC) وبالتالي $E \in (ABC)$.

إحداثيات النقطة (D) لا تحقق معادلة المستوي (ABC) وبالتالي $D \notin (ABC)$.

لدينا: $\overrightarrow{DE}(2;2;1)$، ومن معادلة المستوي (ABC) نستنتج أن $\vec{n}(2;2;-1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC). الشعاعان $\overrightarrow{DE}$ و $\vec{n}$ غير مرتبطين خطيا، وبالتالي $\overrightarrow{DE}$ ليس شعاعا ناظما للمستوي (ABC).

إذن: النقطة E ليست المسقط العمودي للنقطة (D) على المستوي (ABC).

❸ المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان ← صحيح

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB) و $\overrightarrow{CD}(-2;-1;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (CD).

ولدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=(-2)(-2)+0\times(-1)+(-4)\times 1=0$

نستنتج أن: $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$

إذن: المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.

❹ تمثيل وسيطي للمستقيم (CD) هو: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ ← خاطئ

هل أن إحداثيات النقطة C تحقق الجملة المعطاة؟

لدينا: $\begin{cases} 3=-1+2t \\ 1=-1+t \\ -3=1-t \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} t=2 \\ t=2 \\ t=4 \end{cases}$ نستنتج أن النقطة $C \notin (CD)$

❺ النقطة I تنتمي إلى المستقيم (AB) ← صحيح

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)$ و $\overrightarrow{AI}\left(-\frac{7}{5};0;-\frac{14}{5}\right)$

ومنه: $\overrightarrow{AB}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AI}$. نستنتج أن النقط A ، B وَ I في استقامية.

إذن: النقطة I تنتمي إلى المستقيم (AB).

التمرين 16: بكالوريا تونس جوان 2006

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث:

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$$

❶ أثبت أن (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R.

❷ ليكن (P) المستوي الذي معادلته: $x-2y+2z+2=0$.

أ- أثبت أن تقاطع سطح الكرة (S) والمستوي (P) هو دائرة (C).

ب- عيّن إحداثيات المركز ω ونصف القطر r للدائرة (C).

❸ لتكن $M(a;b;-1)$ نقطة من سطح الكرة (S) حيث a ، b عددان حقيقيان و (Q) المستوي الذي معادلته الديكارتية:

$$(a-1)x+(b+2)y+z-a+2b+3=0$$

أ- أثبت أن النقطة M تنتمي إلى المستوي (Q).

ب- أثبت أن (S) و (Q) متماسان في النقطة M.

الحل:

❶ إثبات أن (S) سطح كرة:

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$

ومنه: $(x^2-2x)+(y^2+4y)+(z^2+4z)+5=0$

أخيرا: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=4$

إذن: (S) هي سطح كرة مركزها النقطة $\Omega(1;-2;-2)$ ونصف قطرها $R=2$

❷ أ- إثبات أن تقاطع سطح الكرة (S) والمستوي (P) هو دائرة (C):

حساب $d(\Omega;(P))$ بُعد النقطة Ω عن المستوي (P):

تذكير: في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، المسافة بين النقطة $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب: $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

ومنه: $d = d(\Omega;(p)) = \dfrac{|1-2(-2)+2(-2)+2|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{3}{3} = 1$

بما أن بُعد المركز Ω عن المستوي (p) أقل من نصف قطر سطح الكرة (S) فإن تقاطع سطح الكرة (S) والمستوي (p) هو دائرة (C).

ب- تعيين إحداثيات المركز ω ونصف القطر r للدائرة (C):

○ حساب نصف القطر r:

لدينا: $d = d(\Omega;(p)) = 1$ ولدينا: $R = 2$

بما أن $d(\Omega;(p)) < R$ نستنتج أن (p) يقطع (S) وفق دائرة (c) نصف قطرها r

حيث: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{(2)^2 - (1)^2} = \sqrt{3}$

○ تعيين إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة (c):

ω مركز الدائرة (c) هي نقطة تقاطع المستوي (p) و المستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (p).

○ كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ):

بما أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (p) و $\vec{n}(1;-2;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (p) فإن $\vec{n}(1;-2;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

تكون M نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ مرتبطين خطيا

وهذا يعني وجود عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{\Omega M} = t\vec{n}$

ومنه التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t-2 \\ z = 2t-2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

○ إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة (c):

ω مركز الدائرة (c) هي نقطة تقاطع (p) و (Δ).

إحداثيات ω تحقق معادلة المستوي (p) وتحقق التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

ومنه: $\begin{cases} x-2y+2z+2=0 \\ x=t+1 \\ y=-2t-2 \\ z=2t-2 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} (t+1)-2(-2t-2)+2(2t-2)+2=0 \\ x=t+1 \\ y=-2t-2 \\ z=2t-2 \end{cases}$

نستنتج أن: $t=-\frac{1}{3}$

إذن: $\omega\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3};-\frac{8}{3}\right)$

3 $M(a;b;-1)$ نقطة من سطح الكرة (S) و (Q) المستوي الذي معادلته الديكارتية:

$$(a-1)x+(b+2)y+z-a+2b+3=0$$

أ- إثبات أن النقطة M تنتمي إلى المستوي (Q):

تنتمي النقطة M إلى المستوي (Q) إذا وفقط إذا كانت إحداثياتها تحقق معادلة (Q)

لدينا:

$$\begin{aligned}(a-1)x_M+(b+2)y_M+z_M-a+2b+3&=(a-1)\times a+(b+2)\times b-1-a+2b+3\\&=a^2-a+b^2+2b-1-a+2b+3\\&=a^2+b^2-2a+4b+2\end{aligned}$$

ومنه: $(a-1)x_M+(b+2)y_M+z_M-a+2b+3=a^2+b^2-2a+4b+2 \cdots (1)$

لكن: $M\in(S)$ وبالتالي: $a^2+b^2+(-1)^2-2a+4b+4\times(-1)+5=0$

ومنه: $a^2+b^2-2a+4b+2=0 \cdots (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن $(a-1)x_M+(b+2)y_M+z_M-a+2b+3=0$

إذن: النقطة M تنتمي إلى المستوي (Q).

ب- إثبات أن (S) و (Q) متماسان في النقطة M:

بُعد Ω عن (Q) هو: $d(\Omega;(Q))=\frac{|(a-1)\times1+(b+2)(-2)-2-a+2b+3|}{\sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2+1}}$

$$=\frac{4}{\sqrt{(a^2+b^2-2a+4b+2)+4}}=\frac{4}{\sqrt{0+4}}=2$$

لدينا من جهة : بُعد المركز Ω عن المستوي (Q) يساوي نصف قطر (S) وبالتالي فإن المجموعتين (S) و (Q) متماستان .

من جهة أخرى وحسب السؤال السابق: M نقطة مشتركة بين (S) و (Q).

إذن: (S) و (Q) متماسان في النقطة M .

التمرين 17:

Bac Réunion juin 2006

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

من بين أربع إجابات مقترحة لكل سؤال من الأسئلة 1، 2، 3 و 4 ، توجد إجابتان صحيحتان وإجابتان خاطئتان. على المتر شح أن يشير على ورقة إجابته إلى رقم السؤال ويختار الإجابتين الصحيحتين دون تبرير. الأسئلة مستقلة عن بعضها.

❶ ليكن (p) المستوي الذي معادلته: $2x+3y+4z-1=0$.

أ- المسافة بين النقطة O والمستوي (p) هي 1.

ب- المسافة بين النقطة O والمستوي (p) هي $\frac{1}{\sqrt{29}}$.

جـ- الشعاع $\vec{n}\left(1;\frac{3}{2};2\right)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (p).

د- المستوي (Q) الذي معادلته $-5x+2y+z=0$ يوازي المستوي (p).

❷ ليكن (p) المستوي الذي معادلته: $2x+y-z=0$ ، (D) المستقيم المار بالنقطة $A(1,1,1)$ والموجه بالشعاع $\vec{u}(1;-4;-2)$.

أ- المستقيم (D) يوازي المستوي (p).

ب- المستقيم (D) عمودي على المستوي (p).

جـ- المستقيم (D) يقطع المستوي (p).

د- تمثيل وسيطي للمستقيم (D) هو: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-4t \\ z=1-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

❺ لتكن (E) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث:

$x+y+z=3$ و $2x-z=1$. $A(1,1,1)$ نقطة ثابتة من الفضاء.

أ- المجموعة (E) تشمل نقطة واحدة هي النقطة A .

ب- المجموعة (E) هي مستقيم مار بالنقطة A .

جـ- المجموعة (E) هي مستو مار بالنقطة A .

د- المجموعة (E) هي مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}(1;-3;2)$.

❹ $ABCD$ رباعي وجوه كيفي. ليكن (p) المستوي الذي يشمل النقطة A والعمودي على المستقيم (BC).

أ- النقطة (D) تنتمي دوما إلى المستوي (p) .

ب- المستوي (p) يشمل دوما الارتفاع (AH) للمثلث ABC.

جـ- المستوي (p) هو دوما مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$$

د- المستوي (p) هو دوما المستوي المحوري للقطعة $[BC]$.

الحل:

❶ الإجابتان الصحيحتان هما :

ب- المسافة بين النقطة O والمستوي (p) هي $\frac{1}{\sqrt{29}}$.

جـ- الشعاع $\vec{n}\left(1;\frac{3}{2};2\right)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (p).

❷ الإجابتان الصحيحتان هما :

أ- المستقيم (D) يوازي المستوي (p) .

د- تمثيل وسيطي للمستقيم (D) هو: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\y=1-4t\\z=1-2t\end{cases}$

❸ الإجابتان الصحيحتان هما :

ب- المجموعة (E) هي مستقيم مار بالنقطة A .

د- المجموعة (E) هي مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}(1;-3;2)$.

❹ الإجابتان الصحيحتان هما:

ب- المستوي (p) يشمل دوما الارتفاع (AH) للمثلث ABC.

لدينا: $(AH)\perp(BC)$ ومنه: $(AH)\in(P)$

جـ- المستوي (p) هو دوما مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$$

لدينا: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ومنه: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0$

ومنه: $\overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA})=0$ أخيرا: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=0$

إذن: مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=0$ هي المستوي الذي يشمل النقطة A والعمودي على المستقيم (BC) أي هي المستوي (p).

التمرين 18:

Bac Amérique du Sud Novembre 2006

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(3;1;-5)$، $B(0;4;-5)$، $C(-1;2;-5)$ و $D(2;3;4)$.

أجب بصحيح أو خاطئ دون تعليل:

❶ النقط A، B و D في استقامية.

❷ المستقيم (AB) محتوى في المستوي الذي معادلته: $x+y=4$.

❸ معادلة ديكارتية للمستوي (BCD) هي: $18x-9y-5z+11=0$.

النقط A، B وَ C و D تقع في مستو واحد.

❺ سطح الكرة التي مركزها A ونصف قطرها 9 تمسّ المستوي (BCD).

❻ تمثيل وسيطي للمستقيم (BD) هو: $\begin{cases}x=1-2k\\ y=\frac{7}{2}+k\\ z=-\frac{1}{2}-9k\end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$

الحل:

❶ خاطئ.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ و $\overrightarrow{AD}(-1;2;9)$، نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$

غير مرتبطين خطيا لأن مثلا: $\frac{3}{2} \neq \frac{-3}{-1}$ (لا يوجد عدد حقيقي α بحيث: $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AD}$)

نستنتج أن النقط A ، B و D ليست في استقامية.

❷ صحيح.

إحداثيات كل من A و B تحقق المعادلة $x + y = 4$. وبالتالي فإن النقطتين A و B تنتميان إلى المستوي الذي معادلته $x + y = 4$. نستنتج أن المستقيم (AB) محتوى في هذا المستوي.

❸ صحيح.

إحداثيات كل من B ، C و D تحقق المعادلة: $18x - 9y - 5z + 11 = 0$

من جهة أخرى يمكن التحقق بسهولة أن النقط B ، C و D ليست على استقامة واحدة. نستنتج أن معادلة المستوي (BCD) هي: $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.

❹ خاطئ لأن مثلا إحداثيات النقطة A لا تحقق معادلة المستوي (BCD).

❺ خاطئ لأن بُعد المركز A عن المستوي (BCD) هو $\frac{81}{\sqrt{430}}$ أي $\frac{81}{\sqrt{430}} \neq 9$

❻ صحيح. من العلاقة $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BD}$ وبوضع $2t = 1 - 2k$ نحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = \frac{7}{2} + k \\ z = -\frac{1}{2} - 9k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

التمرين 19: Bac Nouvelle Calédonie novembre 2006

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$، نعتبر:

النقط $A(0;0;3)$ ، $B(2;0;4)$ ، $C(-1;1;2)$ و $D(1;-4;0)$.

المستوي (P_1): $7x + 4y - 3z = -9$ والمستوي (P_2): $x - 2y = 0$.

المستقيم (Δ_1) المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-8+2t \\ z=-10+5t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

المستقيم (Δ_2) المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=7+2t' \\ y=8+4t' \\ z=8-t' \end{cases} (t'\in\mathbb{R})$

من بين أربع إجابات مقترحة لكل سؤال من الأسئلة 1، 2، 3،4 و 5 توجد إجابة واحدة صحيحة. على المتر شح أن يشير على ورقة إجابته إلى رقم السؤال ويختار الإجابة الصحيحة دون تبرير.

1. المستوي (P_1) هو:

أ- المستوي (ABC) . ب- المستوي (BCD).

جـ- المستوي (ACD) . د- المستوي (ABD).

2. المستقيم (Δ_1) يشمل:

أ- النقطة A . ب- النقطة B.

جـ- النقطة C . د- النقطة D.

3. الوضعية النسبية للمستوي (P_1) والمستقيم (Δ_1):

أ- المستقيم (Δ_1) يوازي تماما المستوي (P_1).

ب- المستقيم (Δ_1) محتوى في المستوي (P_1).

جـ- المستقيم (Δ_1) يقطع المستوي (P_1).

د- المستقيم (Δ_1) عمودي على المستوي (P_1).

4. الوضعية النسبية للمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2):

أ- المستقيم (Δ_1) يوازي تماما المستقيم (Δ_2).

ب- المستقيمان (Δ_1) و(Δ_2) متطابقان.

جـ- المستقيمان (Δ_1) و(Δ_2) متقاطعان.

د- المستقيمان(Δ_1) و(Δ_2) لا ينتميان إلى مستو واحد.

5. المستويان (P_1) و (P_2) يتقاطعان ضمن مستقيم تمثيله الوسيطي هو:

أ- $\begin{cases} x=t \\ y=-2+\frac{1}{2}t \\ z=3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

ب- $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=3+6t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

جـ- $\begin{cases} x=5t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

د- $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \\ z=-3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

الحل:

❶ جـ- المستوي (ACD).

إحداثيات كل نقطة من النقط A ، C و D تحقق معادلة المستوي (P_1).

(إحداثيات النقطة B لا تحقق معادلة المستوي (P_1))

الشعاعان $\overrightarrow{AC}(-1;1;-1)$ و $\overrightarrow{AD}(1;-4;-3)$ غير مرتبطين خطيا.

إذن: المستوي (P_1) هو المستوي (ACD).

❷ د- النقطة D.

$A\in(\Delta_1)$ يعني: $\begin{cases} 0=-1+t \\ 0=-8+2t \\ 3=-10+5t \end{cases}$ ومنه: $t=1$ و $t=4$ (لا توجد حلول للجملة)

$B\in(\Delta_1)$ يعني: $\begin{cases} 2=-1+t \\ 0=-8+2t \\ 4=-10+5t \end{cases}$ ومنه: $t=3$ و $t=4$ (لا توجد حلول للجملة)

$C\in(\Delta_1)$ يعني: $\begin{cases} -1=-1+t \\ 1=-8+2t \\ 2=-10+5t \end{cases}$ ومنه: $t=0$ و $t=\frac{9}{2}$ (لا توجد حلول للجملة)

$D\in(\Delta_1)$ يعني: $\begin{cases} 1=-1+t \\ -4=-8+2t \\ 0=-10+5t \end{cases}$ ومنه: $t=2$ وبالتالي الجملة تقبل حلا واحدا

إذن: المستقيم (Δ_1) يشمل النقطة D.

❸ ب- المستقيم (Δ_1) محتوى في المستوي (P_1).

$\vec{n}(7;4;-3)$ شعاع ناظمي لـ (P_1) و $\vec{u}(1;2;5)$ شعاع توجيه لـ (Δ_1)

ولدينا: $\vec{n}.\vec{u}=7\times1+4\times2-3\times5=0$ ومنه: $\vec{n}\perp\vec{u}$

نستنتج أن (Δ_1) و (P_1) متوازيان.

ومن السؤالين السابقين وجدنا أن $D\in(P_1)$ و $D\in(\Delta_1)$.

إذن: المستقيم (Δ_1) محتوى في المستوي (P_1).

❹ جـ- المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) متقاطعان .

إحداثيات نقطة مشتركة بين (Δ_1) و (Δ_2) تحقق الجملة: $\begin{cases}-1+t=7+2t'\\-8+2t=8+4t'\\-10+5t=8-t'\end{cases}$

وبحل هذه الجملة نجد: $\begin{cases}t=4\\t'=-2\end{cases}$

النقطة من (Δ_1) من أجل $t=4$ هي $(3;0;10)$ والنقطة من (Δ_2) من أجل $t'=-2$ هي $(3;0;10)$ وبالتالي فإن المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في النقطة التي إحداثياتها $(3;0;10)$

❺ ب- $\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=3+6t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

إحداثيات نقطة مشتركة بين (P_1) و (P_2) تحقق الجملة: $\begin{cases}x-2y=0\\7x+4y-3z=-9\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases}x=2y\\7(2y)+4y-3z=-9\end{cases}$ أي: $\begin{cases}x=2y\\18y-3z=-9\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}x=2y\\z=6y+3\end{cases}$

وبوضع: $y=t$ نحصل على التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=3+6t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

التمرين 20:

Bac France septembre 2005

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 نعتبر المستوي (P) الذي يشمل النقطة $B(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له والمستوي (P') الذي معادلته $x+2y-7=0$.

أ- أثبت أن المستويين (P) و (P') متعامدان.

ب- بيّن أن المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يشمل النقطة $C(-1;4;-1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;-1;1)$.

جـ- لتكن النقطة $A(5;-2;-1)$. احسب المسافة بين النقطة A والمستوي (P)، ثم المسافة بين النقطة A والمستوي (P').

د- استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

2 أ- لتكن، من أجل كل t من $\mathbb{R}$، النقطة M_t التي إحداثياتها $(1+2t;3-t;t)$ عيّن بدلالة t الطول AM_t (نرمز بـ $\varphi(t)$ لهذا الطول).

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة φ على $\mathbb{R}$، حدّد القيمة الحدّية الصغرى لها.

جـ- فسّر هندسيا هذه القيمة الحدّية الصغرى.

الحل:

1 أ- إثبات أن المستويين (P) و (P') متعامدان:

إذا كان $\vec{n'}$ شعاعا ناظميا للمستوي (P') فإن $\vec{n'}(1;2;0)$

ولدينا: $\vec{n}.\vec{n'}=-2\times1+1\times2+5\times0=0$ ومنه: $\vec{n}\perp\vec{n'}$

إذن: (P) و (P') متعامدان.

ب- إثبات أن المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ):

(Δ) يشمل النقطة $C(-1;4;-1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;-1;1)$.

$\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) وبالتالي فإن معادلته من الشكل:

$-2x+y+5z+\alpha=0$. وبما أن $B(1;-2;1)\in(P)$ فإن $-2\times1-2+5+\alpha=0$

ومنه: $\alpha=-1$

إذن: معادلة المستوي (P) هي $-2x+y+5z-1=0$

إحداثيات نقطة مشتركة بين (P) و(P') تحقق الجملة: $\begin{cases}x+2y-7=0\\-2x+y+5z-1=0\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases}x=-2y+7\\-2(-2y+7)+y+5z-1=0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}x=-2y+7\\z=-y+3\end{cases}$

وبوضع $y=-t$ نحصل على تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ): $\begin{cases}x=7+2t\\y=-t\\z=3+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

واضح أن (Δ) يشمل النقطة $C(-1;4;-1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;-1;1)$

(نحصل على إحداثيات النقطة C من أجل $t=-4$)

جـ- حساب المسافة بين النقطة A والمستوي (P):

تذكير: المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث:

$$d(A;P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ومنه: $d(A;(P))=\frac{|-10-2-5-1|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$

المسافة بين النقطة A والمستوي (P'):

$$d(A;(P'))=\frac{|5-4-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

د- حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ):

باستعمال نظرية فيثاغورث: $d^2(A;(\Delta))=d^2(A;(P))+d^2(A;(P'))$

$$=\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2=18$$

إذن: $d(A;(\Delta))=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

❷ أ- حساب الطول AM_t :

لدينا: $\overrightarrow{AM_t}\ (2t-4\,;-t+5\,;t+1)$

ومنه: $AM_t=\sqrt{(2t-4)^2+(-t+5)^2+(t+1)^2}=\sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)}$

إذن: $\varphi(t)=\sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)}$

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة φ :

لدينا: $\varphi'(t)=\dfrac{6(t-2)}{\sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)}}$ وبالتالي فإن إشارة $\varphi'(t)$ هي إشارة $(t-2)$

الدالة φ متناقصة على المجال $]-\infty\,;2]$ ثم متزايدة على المجال $[2\,;+\infty[$ ولها

قيمة حدّية صغرى من أجل $t=2$ هي $\varphi(2)=\sqrt{6\left(2^2-4\times2+7\right)}=3\sqrt{2}$

جـ- التفسير الهندسي للقيمة الحدّية الصغر:

من السؤال 1 الفرع (د) وجدنا أن $d(A\,;(\Delta))=3\sqrt{2}$ وبملاحظة أن $M_t\in(\Delta)$

نستنتج أن المسافة AM_t هي أقصر مسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

التمرين 21: (Bac S Pondichery avril 2012)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر

❖ المستويين (P) و (P') اللذين معادلتاهما على الترتيب :

$$x+y+3z=0 \quad \text{و} \quad x-y-z-2=0$$

❖ المستقيم (D) الذي تمثيل وسيطي له : $\begin{cases}x=-2t-3\\y=2t\\z=2t+1\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

أجب بـ صحيح أو خاطئ مع التبرير عن كل سؤال من الأسئلة الآتية :

1) المستقيم (D) عمودي على المستوي (P) .

2) سطح الكرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 مماسة للمستوي (P) .

3) يتقاطع المستويين (P) و (P') وفق مستقيم (Δ) تمثيل وسيطي له :

$$\begin{cases}x=-t'+1\\y=-2t'-1\\z=t'\end{cases}\quad(t'\in\mathbb{R})$$

4) المستقيمان (D) و (Δ) يقعان في نفس المستوي .