الدالة الأسية

منتدى وهران التابع

الكفاءات المستهدفة

- يوظف خواص الدالة الأسية النيبيرية.
- يحل مشكلات بتوظيف الدوال الأسية.
- يعرف ويفسّر النهايات الشهيرة الخاصة بالدوال الأسية

$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \text{ و } \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0\right)$

MATH-DZ.COM

نشاط :

مقدمة: تتم نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية والبيولوجية والاقتصادية و غيرها باستخدام دالة f متناسبة مع دالتها المشتقة f' .

سوف نهتم هنا بدالة من هذا النوع وهي دالة تساوي دالتها المشتقة .

فرضية : نقبل أنه توجد دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرطين التاليين : (1) $f'=f$ و (2) $f(0)=1$.

1) باستعمال طريقة أولر وباختيار خطوة $h=0.005$ ، أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-3;3]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f .

نذكر أنه إذا كان h قريب من 0 فإن $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$

وبما أن $f'=f$ فإن $f(x_0+h)\approx f(x_0)(1+h)$

لدينا كذلك $f(x_0-h)\approx f(x_0)-hf'(x_0)$ وبما أن $f'=f$ فإن

$f(x_0-h)\approx f(x_0)(1-h)$

2) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=f(x)\times f(-x)$.

أ- بين أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

ب- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، (3) $f(x)\times f(-x)=1$

جـ- برهن بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، (4) $f(x)\neq 0$

3) نفرض أنه توجد دالة ثانية g تحقق $g'=g$ و $g(0)=1$.

بما أن الدالة f لا تنعدم على $\mathbb{R}$ ، نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$k(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

أ- بين أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

ب- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g(x)=f(x)$.

4) ليكن y عددا حقيقيا كيفيا ثابتا. نعتبر الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$i(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$.

أ- بين أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ وأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $i(x)=f(y)$.

MATHSACADEMY.NET

ب- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ،

$$f(x+y)=f(x)\times f(y) \quad (5)$$

جـ- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ،

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)} \quad (6)$$

5) ليكن n عددا صحيحا نسبيا ولتكن j الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$j(x)=\frac{f(nx)}{[f(x)]^n}$$

أ- عين الدالة المشتقة للدالة j.

ب- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(nx)=[f(x)]^n$ (7)

تعريف : تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : $f'=f$ و $f(0)=1$ الدالة الأسية (النيبيرية) . ونرمز إليها بالرمز " exp " .

إذن : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=\exp(x)$

6) اكتب باستعمال الترميز السابق كل النتائج (1) ، (2) ، ... ، (7).

الحل :

1) أ- إنجاز جدول يتضمن القيم التقريبية لـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-3;3]$:

العمود A :

- في الخلية A1 : اكتب « h » .
- في الخلية A2 : احجز « 0.05 » .

العمود B :

- في الخلية B1 : اكتب « $x-h$ » .
- في الخلية B2 : احجز « 0 » (0 هي قيمة ابتدائية للمتغير)
- في الخلية B3 : احجز الصيغة « = B2 – A2F4 » (يتم حجز F4 انطلاقا من لوحة المفاتيح) فتظهر على الشكل =B2–A2 ثم اضغط على *Entrée*

منتدى وهران التابع
أكاديمية الرياضيات
MATHS ACADEMY

تعطي النتيجة 0.05–.

– حدّد الخلية B3 بالنقر عليها.

– ضع المشيرة في الزاوية اليمنى السفلى (مكان السحب) ليصبح شكلها + .

– اسحب إلى الأسفل من مكان السحب حتى السطر 62 (الحصول على 3 –)

– عندما نترك زرّ الفأرة تظهر كل نتائج العمود B في الجدول (من B2 إلى B62)

العمود C :

– في الخلية C1: اكتب « $f(x-h)$ » ($f(x_0-h)\approx f(x_0)(1-h)$) .

– في الخلية C2: احجز « 1 » (لأن $f(0)=1$) .

– في الخلية C3: احجز الصيغة « $=C2*(1-A2F4)$ » (يتم حجز F4 انطلاقا من لوحة المفاتيح) فتظهر على الشكل $=C2*(1-\$A\$2)$ ثم اضغط على *Entrée* تعطي النتيجة 0.95.

– حدّد الخلية C3 بالنقر عليها.

– ضع المشيرة في الزاوية اليمنى السفلى (مكان السحب) ليصبح شكلها + .

– اسحب إلى الأسفل من مكان السحب حتى السطر 62 .

– عندما نترك زرّ الفأرة تظهر كل نتائج العمود C في الجدول (من C2 إلى C62)

MATHSACADEMY.NET

العمود D :

– في الخلية D1: اكتب « $x+h$ » .

– في الخلية D2: احجز « 0 » (0 هي قيمة ابتدائية للمتغير)

– في الخلية D3: احجز الصيغة « $=D2+A2F4$ » (يتم حجز F4 انطلاقا من لوحة المفاتيح) فتظهر على الشكل $=D2+\$A\$2$ ثم اضغط على *Entrée* تعطي النتيجة 0.05.

– حدّد الخلية D3 بالنقر عليها.

– ضع المشيرة في الزاوية اليمنى السفلى (مكان السحب) ليصبح شكلها + .

- اسحب إلى الأسفل من مكان السحب حتى السطر 62 (الحصول على 3 +)
- عندما نترك زرّ الفأرة تظهر كل نتائج العمود D في الجدول (من D2 إلى D62)

العمود E:

- في الخلية E1: اكتب « $f(x+h)$ » ($f(x_0+h) \approx f(x_0)(1+h)$).
- في الخلية E2: احجز « 1 » (لأن $f(0)=1$).
- في الخلية E3: احجز الصيغة « $=E2*(1+A2F4)$ » (يتم حجز F4 انطلاقا من لوحة المفاتيح) فتظهر على الشكل $=E2*(1+\$A\$2)$ ثم اضغط على *Entrée* تعطي النتيجة 1.05

منتدى وهران التابع

- حدّد الخلية E3 بالنقر عليها.
- ضع المشيرة في الزاوية اليمنى السفلى (مكان السحب) ليصبح شكلها +.
- اسحب إلى الأسفل من مكان السحب حتى السطر 62.
- عندما نترك زرّ الفأرة تظهر كل نتائج العمود E في الجدول (من E2 إلى E62)

	A	B	C	D	E
1	h	x-h	f(x-h)	x+h	f(x+h)
2	0,05	0	1	0	1
3		-0,05	0,95	0,05	1,05
4		-0,1	0,9025	0,1	1,1025
5		-0,15	0,857375	0,15	1,157625
6		-0,2	0,81450625	0,2	1,21550625
7		-0,25	0,77378094	0,25	1,27628156
8		-0,3	0,73509189	0,3	1,34009564
9		-0,35	0,6983373	0,35	1,40710042
10		-0,4	0,66342043	0,4	1,47745544
11		-0,45	0,63024941	0,45	1,55132822
12		-0,5	0,59873694	0,5	1,62889463
13		-0,55	0,56880009	0,55	1,71033936
14		-0,6	0,54036009	0,6	1,79585633
15		-0,65	0,51334208	0,65	1,88564914
16		-0,7	0,48767498	0,7	1,9799316
60		-2,9	0,05104687	2,9	16,9425722
61		-2,95	0,04849453	2,95	17,7897009
62		-3	0,0460698	3	18,6791859

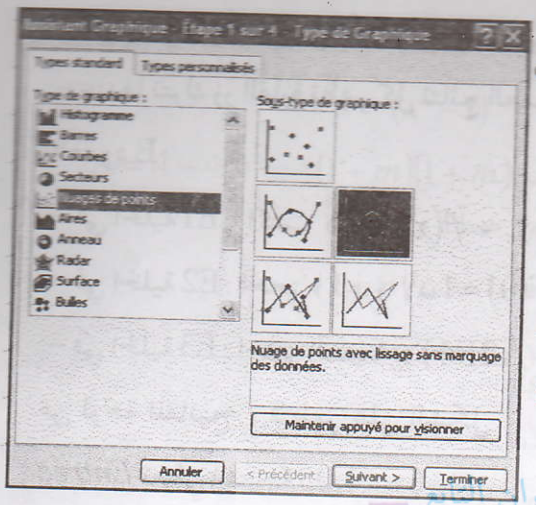
MATHS-FORUM.COM

ب- إنشاء تمثيل تقريبي للدالة f : (ننشئ هذا التمثيل على ثلاث مراحل)

المرحلة الأولى: في المجال $[-3;0]$

- حدّد محتويات الخلايا من B2 إلى B62 ومن C2 إلى C62.

(يتم التحديد دون ترك الفأرة كما يمكن التحديد بالأجزاء باستعمال المفتاح *Ctrl*)



- انقر على أداة التخطيط عند ذلك تظهر النافذة المقابلة.
- في هذه النافذة، نختار Nuages de points ونوع المنحني ثم ننقر على Suivant.
- في كل مرة ننقر فيها على Suivant يظهر إطار للقيام ببعض الخيارات (ليست إجبارية)، كإضافة عنوان أو *Série* أو ...
- عندما تنتهي الخيارات ننقر على Terminer فيظهر الشكل الموافق لـ $[-3;0]$.

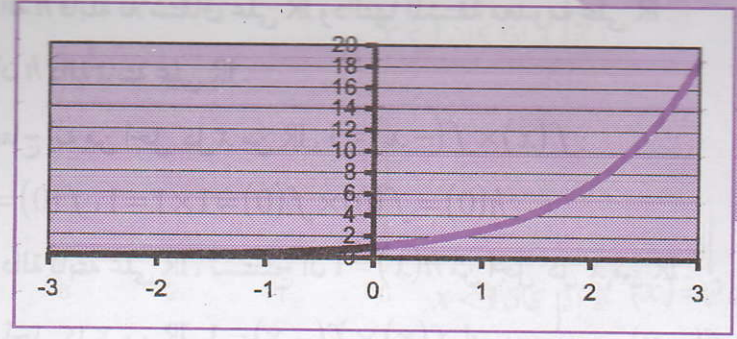
المرحلة الثانية: في المجال $[0;3]$

- حدّد محتويات الخلايا من D2 إلى D62 ومن E2 إلى E62
- انقر على أداة التخطيط .
- اتبع نفس الخطوات السابقة (من Suivant إلى Terminer) فيظهر الشكل.

المرحلة الثالثة: دمج الشكلين السابقين معا.

- انسخ الشكل الأول (استخدم *Copier*) وألصقه فوق الثاني (استخدم *Coller*) فيظهر التمثيل التقريبي للدالة f كاملا على المجال $[-3;3]$ (بلونين مختلفين).
- يمكن استعمال تعديلات لتحسين مظهر الشكل النهائي.
- يمكن استعمال طرق أخرى للحصول على التمثيل التقريبي للدالة f (استعمال *Série* و *Ajouter*)

منتدى وهران التعليم
أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMIE.NET



ملاحظة:

كلما كانت الخطوة أصغر كلما كان التمثيل أدق والقيم أقرب للواقع .

(كلما غيرنا الخطوة h كلما تغيرت معها كل القيم وحصلنا علي تمثيل مرافق)

2) أ- تبيان أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$:

الدالة $x \mapsto f(-x)$ هي مركب من الدالة f والدالة $x \mapsto -x$، وكل منهما قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي فإن الدالة $x \mapsto f(-x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $[f(-x)]' = (-x)' \times f'(-x) = -f'(-x)$

تذكير : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، و v دالة قابلة للاشتقاق على مجال J حيث، من أجل كل عدد حقيقي x من I، $u(x) \in J$،

فإن الدالة المركبة $v \circ u$ قابلة للاشتقاق على I ومن أجل كل x من I،

لدينا : $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$

وعليه فإن الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \times f(-x) + [f(-x)]' \times f(x) \\ &= f'(x) \times f(-x) + [-f'(-x)] \times f(x) \\ &= f'(x) \times f(-x) - f'(-x) \times f(x) \end{aligned}$$

لكن، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = f(x)$ (كذلك $f'(-x) = f(-x)$)

ومنه: $h'(x) = f(x) \times f(-x) - f(-x) \times f(x) = 0$

MATHSACADEMY.NET

إذن : الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معدومة على $\mathbb{R}$.

نستنتج أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

ب- استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)\times f(-x)=1$:

لدينا : $h(0)=f(0)\times f(0)=1\times 1=1$ ، $f(0)=1$

وبما أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$، نستنتج أن $h(x)=1$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)\times f(-x)=1$ أي : $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

جـ- البرهان بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)\neq 0$:

نفرض أنه يوجد x من $\mathbb{R}$ حيث $f(x)=0$ ومنه : $f(x)\times f(-x)=0$

وهذا يتناقض مع النتيجة السابقة (من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)\times f(-x)=1$)

نستنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)\neq 0$.

3) أ- تبيان أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$:

k هي حاصل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$k'(x)=\frac{g'(x)\times f(x)-f'(x)\times g(x)}{[f(x)]^2}=\frac{g(x)\times f(x)-f(x)\times g(x)}{[f(x)]^2}=0$$

إذن : الدالة k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معدومة على $\mathbb{R}$.

نستنتج أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

ب- استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(x)$:

لدينا : $k(0)=\dfrac{g(0)}{f(0)}=\dfrac{1}{1}=1$

وبما أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ نستنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $k(x)=1$

أي : $\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$ ومنه : $g(x)=f(x)$

إذن : من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(x)$ (هذا يبيّن وحدانية الدالة f)

منتدى برهان التابع
MATHSACADEMY.NET

أ- تبيان أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$: (لا تنسى أن y عدد حقيقي كيفي ثابت)

الدالة $x \mapsto f(x+y)$ هي مركب من الدالة f والدالة $x \mapsto x+y$، وكل منهما قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي فإن الدالة $x \mapsto f(x+y)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $[f(x+y)]' = (x+y)' \times f'(x+y) = 1 \times f'(x+y) = f(x+y)$

هي حاصل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$i'(x) = \frac{f'(x+y) \times f(x) - f'(x) \times f(x+y)}{[f(x)]^2}$$

$$= \frac{f(x+y) \times f(x) - f(x) \times f(x+y)}{[f(x)]^2} = 0$$

إذن : الدالة i قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معدومة على $\mathbb{R}$.

نستنتج أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

✦ استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $i(x) = f(y)$:

لدينا : $i(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$ ومنه: $i(0) = \frac{f(0+y)}{f(0)} = \frac{f(y)}{f(0)} = \frac{f(y)}{1} = f(y)$

وبما أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ نستنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $i(x) = f(y)$

إذن : من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $i(x) = f(y)$

ب- استنتاج أنه من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

من $i(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$ و $i(x) = f(y)$ نستنتج أن : $f(y) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$

ومنه: $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

إذن : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

جـ- استنتاج أنه من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$:

من النتيجة $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

منتدى وهران التابع
أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

نستنتج أن: $f(x-y)=f(x+(-y))=f(x)\times f(-y)$

ومن السؤال (2) الفرع (ب) نستنتج أن: $f(y)\times f(-y)=1$

ومنه: $f(-y)=\frac{1}{f(y)}$ وعليه فإن: $f(x-y)=f(x)\times\frac{1}{f(y)}=\frac{f(x)}{f(y)}$

إذن: من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$

5) أ- تعيين الدالة المشتقة للدالة j:

الدالة $x\mapsto f(nx)$ هي مركب من الدالة f والدالة $x\mapsto nx$، وكل منهما قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي فإن الدالة $x\mapsto f(nx)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$، $[f(nx)]'=(nx)'\times f'(nx)=nf'(nx)$

الدالة $x\mapsto[f(x)]^n$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي الدالة:

$x\mapsto nf'(x)[f(x)]^{n-1}$

نستنتج أن الدالة j قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$j'(x)=\frac{[f(nx)]'\times[f(x)]^n-[(f(x))^n]'\times[f(nx)]}{[f(x)]^{2n}}$$

أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

وبعد التبسيط نجد: $j'(x)=0$

إذن: الدالة j قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معدومة على $\mathbb{R}$.

نستنتج أن j دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

ب- استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(nx)=[f(x)]^n$:

لدينا: $j(x)=\frac{f(nx)}{[f(x)]^n}$ ومنه: $j(0)=\frac{f(0)}{[f(0)]^n}=\frac{1}{(1)^n}=1$

وبما أن j دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ نستنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $j(x)=1$

أي: $\frac{f(nx)}{[f(x)]^n}=1$ ومنه: $f(nx)=[f(x)]^n$

إذن: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(nx)=[f(x)]^n$

6) كتابة النتائج (1) ، (2) ، ... ، (7) باستعمال الترميز $f(x)=\exp(x)$:

(1) $\exp'(x)=\exp(x)$

(2) $\exp(0)=1$

(3) $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$

(4) $\exp(x)\neq 0$

(5) $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$

(6) $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

(7) $\exp(nx)=(\exp x)^n$

منتدى وهران التابع
أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

الدالة الأسية

1 مبرهنة وتعريف : توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث:

$f' = f$ و $f(0)=1$. هذه الدالة تسمى الدالة الأسية ونرمز إليها بـ « exp » .

ملاحظة:

✦ الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' = y$ التي تحقق $y(0)=1$.

منتدى وهران التابع

نتائج :

✦ $\exp(0)=1$.

✦ الدالة « exp » قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\exp'(x)=\exp(x)$.

✦ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\exp(x)>0$.

✦ الدالة «exp» متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2 الخواص الجبرية:

أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

أ- الخاصة الأساسية : من أجل كل عددين حقيقيين x و y :

$$\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$$

ب- نتائج : من أجل كل عددين حقيقيين x ، y ومن أجل كل عدد صحيح n:

✦ $$\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$$

✦ $$\exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

✦ $$\exp(nx)=(\exp x)^n$$

3 العدد e والترميز e^x:

✦ العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي : $e=\exp(1)$.

✦ تعطينا آلة حاسبة $e\approx 2.718281828$.

✦ من المساواة : $\exp(nx)=(\exp x)^n$ نستنتج أن :

$\exp(n)=e^n$: أي $\exp(n)=\exp(n\times 1)=(\exp 1)^n=e^n$.

✦ اصطلاحا نرمز ، من أجل كل عدد حقيقي x ، لـ $\exp(x)$ بالرمز e^x

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x، $\boxed{\exp(x)=e^x}$. e^x تقرأ : « أسية x »

e^x se lit: « exponentielle x » ou « e exposant x »

4 ملخص خواص الدالة الأسية باستعمال الترميز e^x :

من أجل كل عددين حقيقيين x ، y ومن أجل كل عدد صحيح n :

✦ $e^0=1$ ✦ $e^x>0$ ✦ $\left(e^x\right)'=e^x$

✦ $e^{x+y}=e^x\times e^y$ ✦ $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ ✦ $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$

✦ $\left(e^x\right)^n=e^{nx}$

5 دراسة النهاية $f:x\mapsto e^x$

أ- النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

ملاحظة:

λ عدد حقيقي.

- إذا كان $\lambda>0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\lambda x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\lambda x}=0$

- إذا كان $\lambda<0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\lambda x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\lambda x}=+\infty$

ب- اتجاه التغير :

من أجل كل عدد حقيقي x ، $\left(e^x\right)'=e^x$ و $e^x>0$

إذن : الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

نتائج : من أجل كل عددين حقيقيين a ، b :

منتدى برهان التابع
أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

✦ $[e^a = e^b]$ يكافئ $[a = b]$ ✦ $[e^a = 1]$ يكافئ $[a = 0]$

✦ $[e^a > e^b]$ يكافئ $[a > b]$ ✦ $[e^a > 1]$ يكافئ $[a > 0]$

✦ $[e^a < e^b]$ يكافئ $[a < b]$ ✦ $[0 < e^a < 1]$ يكافئ $[a < 0]$

جـ- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
e^x	0	↗	$+\infty$

منتدى وهران التابع

د- التمثيل البياني :

✦ المنحني (c) الممثل للدالة " أسية " يقبل محور الفواصل مستقيم مقارب له .

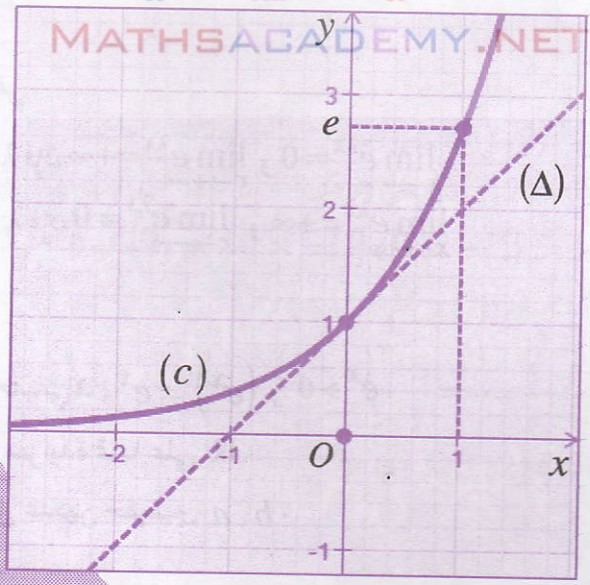
✦ من تعريف العدد المشتق عند 0 ، لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = e^0 = 1$$. إذن : $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$.

✦ المنحني (c) الممثل للدالة الأسية يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا (Δ) معادلته : $y = x + 1$.

✦ الدالة $x \mapsto 1 + x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0 .

(من أجل x قريب من 0 : $e^x \approx 1 + x$)



6 الدوال من الشكل $\exp\circ u$: $(\exp\circ u)(x)=\exp[u(x)]=e^{u(x)}$

أ- النهايات:

n عدد طبيعي.

$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$	$\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$ $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u^n}=+\infty$	$\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$ $\lim\limits_{u\to-\infty}u^n e^u=0$

أمثلة: (لحساب نهاية دالة فيها الدالة الأسية ، تذكر دائما الأشكال السابقة)

منتدى وهران التابع

✦ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^2-3x+1}$:

نعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$ و $\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^2-3x+1}=+\infty$.

✦ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-e^x\right)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{e^x}{x}\right)$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ وبالتالي: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{e^x}{x}\right)=-\infty$

نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{e^x}{x}\right)=-\infty$. إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-e^x\right)=-\infty$.

✦ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+2}$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*-\{-2\}$، $\dfrac{e^x}{x+2}=\dfrac{e^x}{x+2}\times\dfrac{x}{x}=\dfrac{e^x}{x}\times\dfrac{x}{x+2}$

ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+2}=1$. ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+2}=+\infty$

✦ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3)e^x$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}[2(xe^x)-3e^x]=0$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3)e^x=0$

✦ حساب $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}=\dfrac{e^x(e^x-1)}{x}=e^x\times\dfrac{(e^x-1)}{x}$

ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to0}e^x=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ ومنه: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}=1$

ب- المشتقة:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا، من أجل كل x من I، $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$

إذن: $\boxed{(e^u)'=u'e^u}$

ملاحظة:

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{ax+b}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=a\,e^{ax+b}$.

أمثلة: (تذكر دائما القاعدة $(e^u)'=u'e^u$)

✦ مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{3x+2}$ هي الدالة f' حيث:

$$f'(x)=(3x+2)'e^{3x+2}=3e^{3x+2}$$

✦ مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ هي الدالة g' حيث:

$$g'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'e^{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

✦ مشتقة الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=(x-1)e^x$ هي الدالة h' حيث:

$$h'(x)=(x-1)'\times e^x+(e^x)'\times(x-1)=xe^x$$

✦ مشتقة الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $k(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ هي الدالة k' حيث:

منتدى وهران التابع
أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

6 الدوال من الشكل $\exp\circ u$: $(\exp\circ u)(x)=\exp[u(x)]=e^{u(x)}$

أ- النهايات:

n عدد طبيعي.

$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$	$\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$ $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u^n}=+\infty$	$\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$ $\lim\limits_{u\to-\infty}u^n e^u=0$

أمثلة: (لحساب نهاية دالة فيها الدالة الأسية، تذكر دائما الأشكال السابقة)

منتدى وهران التابع

✦ حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^2-3x+1}$

نعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$ و $\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^2-3x+1}=+\infty$.

✦ حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-e^x\right)$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{e^x}{x}\right)$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ وبالتالي: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{e^x}{x}\right)=-\infty$

نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{e^x}{x}\right)=-\infty$. إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-e^x\right)=-\infty$.

✦ حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+2}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*-\{-2\}$، $\dfrac{e^x}{x+2}=\dfrac{e^x}{x+2}\times\dfrac{x}{x}=\dfrac{e^x}{x}\times\dfrac{x}{x+2}$

ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+2}=1$. ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+2}=+\infty$

✦ حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3)e^x$

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}[2(xe^x)-3e^x]=0$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3)e^x=0$

✦ حساب $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}=\dfrac{e^x(e^x-1)}{x}=e^x\times\dfrac{(e^x-1)}{x}$

ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to0}e^x=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ ومنه: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}=1$

ب- المشتقة:

منتدى وهران التابع

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا، من أجل كل x من I، $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$

إذن: $\boxed{(e^u)'=u'e^u}$

ملاحظة:

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{ax+b}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $f'(x)=a\,e^{ax+b}$.

أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

أمثلة: (تذكر دائما القاعدة $(e^u)'=u'e^u$)

✦ مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{3x+2}$ هي الدالة f' حيث:

$$f'(x)=(3x+2)'e^{3x+2}=3e^{3x+2}$$

✦ مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ هي الدالة g' حيث:

$$g'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'e^{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

✦ مشتقة الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=(x-1)e^x$ هي الدالة h' حيث:

$$h'(x)=(x-1)'\times e^x+(e^x)'\times(x-1)=xe^x$$

✦ مشتقة الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $k(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ هي الدالة k' حيث:

$$k'(x)=\frac{\left(e^x\right)'\times\left(e^x-1\right)-\left(e^x-1\right)'\times\left(e^x\right)}{\left(e^x-1\right)^2}=\ldots=\frac{-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$$

جـ- الدوال الأصلية :

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f:x\mapsto e^{u(x)}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto u'(x)\times e^{u(x)}$ على I.

ملاحظة:

الدالة $F:x\mapsto\frac{1}{a}e^{ax+b}$ (حيث $a\neq 0$) هي دالة أصلية للدالة $f:x\mapsto e^{ax+b}$ على $\mathbb{R}$.

منتدى وهران التابع

أمثلة : (حاول دائما كتابة الدالة على الشكل $u'e^u$)

- الدالة $F:x\mapsto\frac{1}{2}e^{2x-1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto e^{2x-1}$ على $\mathbb{R}$ لأن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)=e^{2x-1}$.
- تعيين دالة أصلية للدالة $g:x\mapsto xe^{-x^2}$ على $\mathbb{R}$:

لإظهار الشكل $u'e^u$، نضع $u(x)=-x^2$.

الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $u'(x)=-2x$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=xe^{-x^2}=xe^{-x^2}\times\frac{-2}{-2}=-\frac{1}{2}\left(-2xe^{-x^2}\right)$

نستنتج أن $G:x\mapsto-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ دالة أصلية للدالة $g:x\mapsto xe^{-x^2}$ على $\mathbb{R}$.

- تعيين دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\frac{3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ على $\mathbb{R}^*$:

لإظهار الشكل $u'e^u$، نضع $u(x)=\frac{1}{x}$.

الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $u'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $h(x)=\frac{3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=-3\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$

نستنتج أن $H:x\mapsto-3e^{\frac{1}{x}}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\frac{3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ على $\mathbb{R}^*$.

تمارين محلولة

تمرين محلول 1:

بسط العبارات التالية:

1 $A = e^x \times e^{-x}$ 2 $B = (e^x)^3 \times e^{-2x}$ 3 $C = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-1}}$

الحل:

منتدى وهران التابع

طريقة: لتبسيط عبارات تشتمل على دوال أسية، يمكن استعمال الخواص الجبرية للدالة الأسية.

1 $A = e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$

2 $B = (e^x)^3 \times e^{-2x} = e^{3x} \times e^{-2x} = e^{3x-2x} = e^x$

3 $C = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-1}} = e^{2x+1} \times e^{-(x-1)} = e^{2x+1} \times e^{-x+1} = e^{2x+1-x+1} = e^{x+2}$

تمرين محلول 2:

أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $e^{3-x} = 1$.

الحل:

طريقة: لحل معادلة تشتمل على دوال أسية، يمكن استعمال الخواص الجبرية للدالة الأسية لـ:

- إرجاعها إلى معادلة من الشكل $e^{f(x)} = e^{g(x)}$ التي تكافئ المعادلة $f(x) = g(x)$
- استعمال تبديل المتغير الذي يسمح بإرجاعها إلى شكل مألوف.

لدينا: $e^{3-x} = 1$ أي: $e^{3-x} = e^0$ ومنه: $3 - x = 0$. إذن: $x = 3$

تمرين محلول 3:

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $2X^2 + 3X - 5 = 0$.

❷ استنتج الحلول في $\mathbb{R}$ للمعادلة $2e^{2x}+3e^{x}-5=0$.

الحل:

❶ حل المعادلة $2X^2+3X-5=0$:

لدينا: $2X^2+3X-5=0$ يكافئ $(X-1)(2X+5)=0$

ومنه: $X=1$ أو $X=-\frac{5}{2}$

إذن: المعادلة $2X^2+3X-5=0$ تقبل حلين هما 1 و $-\frac{5}{2}$.

❷ استنتاج حلول المعادلة $2e^{2x}+3e^{x}-5=0$:

بوضع $X=e^{x}$ تكتب المعادلة $2e^{2x}+3e^{x}-5=0$ كما يلي:

$2X^2+3X-5=0$. هذه الأخيرة تقبل حلين هما 1 و $-\frac{5}{2}$.

الحل $-\frac{5}{2}$ مرفوض لأنه من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{x}>0$.

من أجل $X=1$ يكون $e^{x}=1=e^{0}$ ومنه: $x=0$

نستنتج أن المعادلة $2e^{2x}+3e^{x}-5=0$ تقبل حلا واحدا هو 0.

تمرين محلول 4:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $e^{x}+e^{-x}=2$

الحل:

لدينا: $e^{x}+e^{-x}=2$ يكافئ $e^{x}+\frac{1}{e^{x}}=2$ ومنه: $\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}=2$

وبالتالي: $e^{2x}+1=2e^{x}$ وأخيرا: $e^{2x}-2e^{x}+1=0$ أي: $(e^{x}-1)^2=0$

ومنه: $e^{x}=1=e^{0}$. إذن: $x=0$

تمرين محلول 5:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{-x}\leq 1$.

الحل:

طريقة: حل متراجحة تشتمل على دوال أسية، يمكن استعمال الخواص الجبرية للدالة الأسية لـ:

مسدى وهران التابع
أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

- إرجاعها إلى متراجحة من الشكل $e^{f(x)} < e^{g(x)}$ التي تكافئ المتراجحة $f(x) < g(x)$ (أو من الشكل $e^{f(x)} > e^{g(x)}$ التي تكافئ $f(x) > g(x)$)

- استعمال مجهول مساعد لإرجاعها إلى شكل مألوف.

لدينا: $e^{-x} \leq 1$ أي: $e^{-x} \leq e^{0}$ ومنه: $-x \leq 0$ وبالتالي: $x \geq 0$

إذن: مجموعة حلول المتراجحة $e^{-x} \leq 1$ هي $S = [0; +\infty[$

تمرين محلول 6:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{-x^2+x} \leq 1$.

منتدى وهران التابع

الحل:

لدينا: $[e^{-x^2+x} \leq 1]$ يكافئ $[e^{-x^2+x} \leq e^{0}]$ ومنه: $-x^2 + x \leq 0$

وبإخراج العامل مشترك ينتج: $-x(x-1) \leq 0$ ومنه: $x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

إذن: مجموعة حلول المتراجحة $e^{-x^2+x} \leq 1$ هي $S =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

تمرين محلول 7:

ادرس، حسب قيم المتغير الحقيقي x، إشارة الجداء $(x+1)(e^x - 1)$:

الحل:

أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

✦ دراسة إشارة العبارة $(x+1)(e^x - 1)$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$(x+1)$	$-$	$\|$	0	$+$	$\|$	$+$	
$(e^x - 1)$	$-$	$\|$	$\|$	$-$	0	$+$	
$(x+1)(e^x - 1)$	$+$	$\|$	0	$-$	0	$+$	

من جدول الإشارة نستنتج ما يلي:

$[(x+1)(e^x - 1) = 0]$ يكافئ $[x \in \{-1; 0\}]$

$[(x+1)(e^x - 1) > 0]$ يكافئ $[x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[]$

$[(x+1)(e^x - 1) < 0]$ يكافئ $[x \in]-1; 0[]$

تمرين محلول 8:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-3+\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

احسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل:

✦ حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=(2x-3)'+\frac{(e^x)'\times(e^x+1)-(e^x+1)'\times e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=2+\frac{e^x\times(e^x+1)-e^x\times e^x}{(e^x+1)^2}=2+\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

✦ استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x>0$ ومنه: $f'(x)>0$

نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

تمرين محلول 9:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

(c) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

ب- احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$. فسّر هذه النتيجة هندسيا.

جـ- حدّد وضعية المنحنى (c) بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $y=x+1$.

2 أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسّر هذه النتيجة هندسيا.

جـ- حدّد وضعية المنحنى (c) بالنسبة للمستقيم (D') الذي معادلته $y=x-1$.

3 ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

منتدى وهران التابع
أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

4 اكتب معادلة (T) مماس المنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5 ارسم (D)، (D')، (T) و (c).

الحل :

1 أ- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$:

طريقة : للبرهان (أو التحقق) على صحة مساواة نتبع إحدى الطرق التالية :

- ننطلق من الطرف الأول وباستعمال آليات التبسيط نصل إلى الطرف الثاني .
- ننطلق من الطرف الثاني وباستعمال آليات التبسيط نصل إلى الطرف الأول .
- نقوم بتبسيط الطرف الأول وتبسيط الطرف الثاني ونقارن بين نتيجتي التبسيطين .

من أجل كل عدد حقيقي x،

$$x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}=x+\left(1-\frac{2e^x}{e^x+1}\right)=x+\frac{e^x+1-2e^x}{e^x+1}$$

$$=x+\frac{1-e^x}{e^x+1}=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$$

○ طريقة أخرى:

من أجل كل عدد حقيقي x،

$$f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=x+\frac{1-e^x}{e^x+1}=x+\frac{1-e^x+e^x-e^x}{e^x+1}$$

$$=x+\frac{1+e^x-2e^x}{e^x+1}=x+\frac{1+e^x}{e^x+1}+\frac{-2e^x}{e^x+1}=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}$$

ب- حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$

لدينا : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x}{e^x+1}=0$. إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

○ التفسير الهندسي لهذه النتيجة :

تذكير : إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي : $f(x)=ax+b+g(x)$ وكانت

أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى الممثل للدالة f عند $-\infty$ (وبطريقة مماثلة عند $+\infty$).

لدينا: $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ وهي من الشكل $f(x)=ax+b+g(x)$

حيث: $g(x)=-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ وبما أن $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x}{e^x+1}=0$ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (c) عند $-\infty$.

جـ- وضعية المنحنى (c) بالنسبة للمستقيم (D):

منتدى وهران التابع

تذكير: دراسة الوضعية النسبية للمنحنيين c_f و c_g الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يؤول إلى دراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$:

- إذا كان $f(x)-g(x)>0$ فإن $f(x)>g(x)$، وعليه فإن c_f يقع فوق c_g؛
- إذا كان $f(x)-g(x)<0$ فإن $f(x)<g(x)$، وعليه فإن c_f يقع تحت c_g.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)-(x+1)=-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ومنه: $f(x)-(x+1)<0$

نستنتج أن المنحنى (c) يقع تحت المستقيم (D).

أكاديمية الرياضيات
MATHS ACADEMY .NET

2 أ- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$:

من أجل كل عدد حقيقي x،

$$x-1+\frac{2}{e^x+1}=x-\left(1-\frac{2}{e^x+1}\right)=x-\frac{e^x+1-2}{e^x+1}$$

$$=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$$

طريقة أخرى:

$$f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=x-\frac{e^x-1+1-1}{e^x+1}=x-\frac{e^x+1-2}{e^x+1}$$

$$=x-\frac{e^x+1}{e^x+1}+\frac{2}{e^x+1}=x-1+\frac{2}{e^x+1}$$

ب- حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

لدينا: $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$ ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

وبالتالي: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x+1}=0$. إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

✦ التفسير الهندسي لهذه النتيجة:

المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (c) عند $+\infty$.

جـ- وضعية المنحني (c) بالنسبة للمستقيم (D'):

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)-(x-1)=\dfrac{2}{e^x+1}$ ومنه: $f(x)-(x-1)>0$

نستنتج أن المنحني (c) يقع فوق المستقيم (D').

3 دراسة اتجاه تغير الدالة f:

✦ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$f'(x)=(x)'-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=1-\frac{\left(e^x-1\right)'\times\left(e^x+1\right)-\left(e^x+1\right)'\times\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=1-\frac{e^x\times\left(e^x+1\right)-e^x\times\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=1-\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

✦ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$ وبالتالي فإن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

✦ جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

4 كتابة معادلة للمماس (T):

تذكير: معادلة لمماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي:

$$y=f'(a).(x-a)+f(a)$$

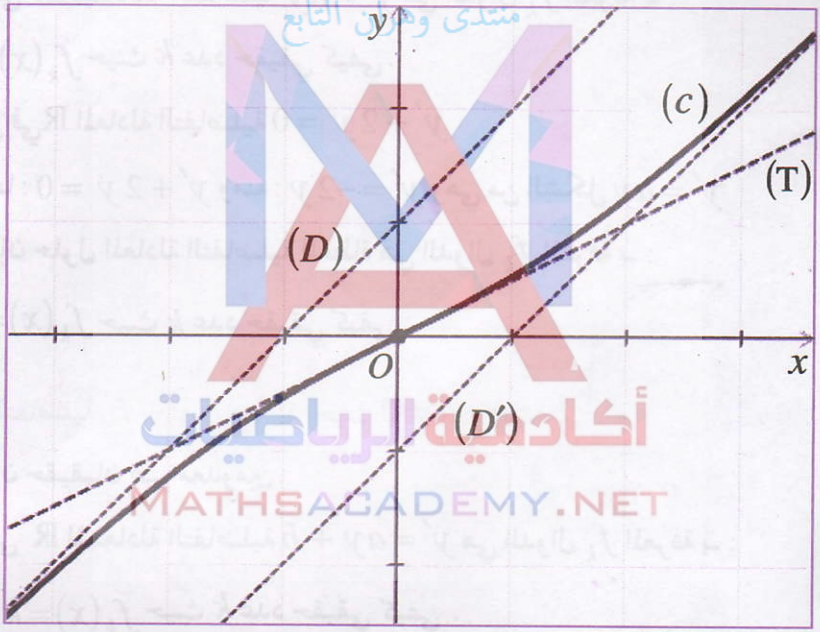
لدينا: $a=0$ ومنه: $f(a)=f(0)=0$ و $f'(a)=f'(0)=\frac{1}{2}$

إذن: معادلة (T) هي $y=\frac{1}{2}x$

ملاحظة:

يمكن دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (c) بالنسبة للمماس (T) واستنتاج أن O نقطة انعطاف للمنحنى (c).

5 رسم (D)، (D')، (T) و (c).



منتدى وطريق التابع
أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

المعادلات التفاضلية

1 تعريف : نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تظهر فيها دالة وبعض مشتقاتها .

ملاحظة : نهتم هنا بمعادلات تفاضلية تظهر فيها دالة ودالتها المشتقة الأولى .

2 المعادلة التفاضلية $y' = a\,y$ **حيث** $a \neq 0$:

a عدد حقيقي غير معدوم .

الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال f_k المعرفة بـ :

$f_k(x) = ke^{ax}$ حيث k عدد حقيقي كيفي .

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y' + 2\,y = 0$

الحل : لدينا : $y' + 2\,y = 0$ ومنه : $y' = -2\,y$ وهي من الشكل $y' = ay$

وبالتالي فإن حلول المعادلة التفاضلية المعطاة هي الدوال f_k المعرفة بـ :

$f_k(x) = ke^{-2x}$ حيث k عدد حقيقي كيفي .

3 المعادلة التفاضلية $y' = a\,y + b$ **حيث** $a \neq 0$ **و** $b \neq 0$:

a و b عددان حقيقيان غير معدومين .

الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هي الدوال f_k المعرفة بـ :

$f_k(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي كيفي .

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y' + 2\,y = 3$

الحل : لدينا : $y' + 2\,y = 3$ ومنه : $y' = -2\,y + 3$ وهي من الشكل $y' = ay + b$

وبالتالي فإن حلول المعادلة التفاضلية المعطاة هي الدوال f_k المعرفة بـ :

$f_k(x) = ke^{-2x} - \dfrac{3}{2}$ حيث k عدد حقيقي كيفي .

أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET

4 خاصية:

من أجل كل ثنائية $(x_0 ; y_0)$ من الأعداد الحقيقية، المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ (مع $a \neq 0$) تقبل حلا وحيدا f حيث $f(x_0) = y_0$.

تمرين محلول 1:

نعتبر المعادلة التفاضلية (1): $y' + 2y = 0$

1. حل المعادلة (1).
2. عيّن الحل f للمعادلة (1) بحيث $f(0) = 1$.
3. ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم في معلم متعامد ومتجانس تمثيلها البياني .

منتدى وهران التابع

الحل :

1. حل المعادلة (1): لدينا: $y' + 2y = 0$ ومنه: $y' = -2y$ وهي من الشكل $y' = ay$ وبالتالي فإن حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال f_k المعرفة بـ: $f_k(x) = ke^{-2x}$ حيث k عدد حقيقي كيفي.
2. تعيين الحل f للمعادلة (1) بحيث $f(0) = 1$:

أكاديمية الرياضيات
MATHS-ACADEMY.NET

لدينا: $f(x) = e^{-2x}$ و $f(0) = 1$ ومنه: $ke^{-2\times 0} = 1$ وبالتالي: $k = 1$

إذن: $f(x) = e^{-2x}$

3. دراسة تغيرات الدالة f:

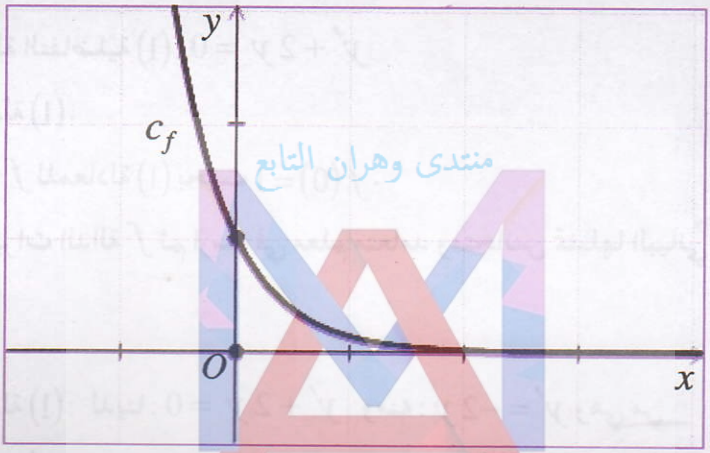
- مجموعة التعريف: الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.
- النهايات: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- اتجاه التغير: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = -2e^{-2x}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) < 0$ وبالتالي فإن f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

○ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

○ رسم المنحنى c_f:



منتدى وهران التابع
أكاديمية الرياضيات
MATHEMATICS ACADEMY

تمرين محلول 2: (بكالوريا أجنبية)

نعتبر المعادلة التفاضلية (1): $y' - 2y = e^{2x}$

1. أثبت أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x) = xe^{2x}$ هي حل للمعادلة (1).
2. حل المعادلة التفاضلية (2): $y' - 2y = 0$.
3. أثبت أن دالة v معرفة على $\mathbb{R}$ هي حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كانت $v - u$ حل للمعادلة (2).
4. استنتج كل حلول المعادلة (1).
5. عيّن الحل f للمعادلة (1) بحيث $f(0) = 1$.

الحل:

1. إثبات أن الدالة u حل للمعادلة التفاضلية (1):

u دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$u'(x)=(x)'\times e^{2x}+(e^{2x})'\times x=(2x+1)e^{2x}$

ومنه: $u'(x)-2u(x)=(2x+1)e^{2x}-2xe^{2x}=\ldots=e^{2x}$

إذن: الدالة u حل للمعادلة التفاضلية (1).

❷ حل المعادلة التفاضلية (2):

لدينا: $y'-2y=0$ ومنه: $y'=2y$ وهي من الشكل $y'=ay$

وبالتالي فإن حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال f_k المعرفة بـ:

$f_k(x)=ke^{2x}$ حيث k عدد حقيقي كيفي.

❸ إثبات أن v حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كانت $v-u$ حل للمعادلة (2):

$v-u$ حل للمعادلة (2) معناه: $(v-u)'-2(v-u)=0$

ومنه: $(v'-2v)-(u'-2u)=0$

لكن حسب السؤال (1)، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $u'(x)-2u(x)=e^{2x}$.

وعليه فإن $v-u$ حل للمعادلة (2) إذا وفق إذا كان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$v'(x)-2v(x)-e^{2x}=0$ أي: $v'(x)-2v(x)=e^{2x}$.

نستنتج أن $v-u$ حل للمعادلة (2) إذا، وفقط إذا، كانت v حل للمعادلة (1).

❹ استنتاج كل حلول المعادلة (1):

v حل للمعادلة (1) إذا، وفقط إذا، كانت $v-u$ حل للمعادلة (2) أي إذا، وفقط إذا، كان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $v(x)-u(x)=ke^{2x}$ مع k عدد حقيقي كيفي

وعليه فإن حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال v المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$v(x)=xe^{2x}+u(x)=xe^{2x}+ke^{2x}=(x+k)e^{2x}$ حيث k عدد حقيقي كيفي

❺ تعيين الحل f للمعادلة (1) بحيث $f(0)=1$:

لدينا: $f(x)=(x+k)e^{2x}$ و $f(0)=1$ ومنه: $(0+k)e^{2\times 0}=1$ أي: $k=1$

إذن: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=(x+1)e^{2x}$

MATHSACADEMY.NET

تمرين محلول 3: (بكالوريا أجنبية)

نعتبر المعادلة التفاضلية (1): $y' + y = e^{-x}$

1. أثبت أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x) = xe^{-x}$ هي حل للمعادلة (1).
2. حل المعادلة التفاضلية (2): $y' + y = 0$.
3. أثبت أن دالة v معرفة على $\mathbb{R}$ هي حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كانت $v - u$ حل للمعادلة (2).
4. استنتج كل حلول المعادلة (1).
5. عيّن الحل f للمعادلة (1) بحيث $f(0) = 2$.

الحل: 5 $f(x) = (x+2)e^{-x}$

تمرين محلول 4: (بكالوريا أجنبية)

نعتبر المعادلة التفاضلية (1): $y' - y = 3e^{-2x}$.

1. لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و v الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$v(x) = u(x)e^{-2x}$$

أثبت أن الدالة v حل للمعادلة (1) إذا، وفقط إذا، كانت الدالة u حل للمعادلة التفاضلية (2): $y' - 3y = 3$.

2. حل المعادلة التفاضلية (2).
3. استنتج أن المعادلة التفاضلية (1) تقبل حلا وحيدا f يحقق $f(0) = -3$.
4. شكل جدول تغيرات الدالة f.

الحل:

3. $f(x) = -e^{-2x} - 2e^{x}$

4. جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

مصطفى وهران التابع
أكاديمية الرياضيات
MATHSACADEMY.NET