

الموضوع الأول

التمرين الأول : (حذفت بعض أسئلة التمرين التي أصبحت خارج البرنامج المقرر)

1- نعتبر العددين المركبين $z_1 = i$ و $z_2 = 1+i$. بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن A ، B و C نقط من

المستوي التي لاحتقاتها على الترتيب I ، z_1 و z_2 . ليكن Z العدد المركب حيث :

$$Z = \frac{z_2 - I}{z_1 - I}$$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ومن الخاصية : $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 ، θ_2 أعداد حقيقية .

ب) أكتب Z على الشكل الأسّي .

ج) أكتب Z على الشكل المثلثي واستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه

مباشر مركزه A ، يطلب تعيين زاويته ومركزه .

التمرين الثاني :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستوي (p) الذي معادلته

$$x + 2y - z + 7 = 0$$
 والنقط $A(2; 0; 1)$ ، $B(3; 2; 0)$ و $C(-1; -2; 2)$.

1- تحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامية ، ثم بين أن المعادلة الديكارسية

$$y + 2z - 2 = 0$$
 هي : (ABC) للمستوي

2- أ) تحقق ان المستويين (p) و (ABC) متعامدان ، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم

(Δ) مستقيم تقاطع (p) و (ABC)

ب) أحسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

3- لتكن G مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; \alpha); (C; \beta)\}$ حيث α و β عدنان يحققان

$$1 + \alpha + \beta \neq 0$$

عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الثالث :

1- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1; 2]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أ) بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2- (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب) عين النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الرابع :

I- نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي:
 $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ حيث a و b عدنان حقيقيان. (C_f) المنحنى الممثل للدالة

f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول lcm .

- عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II- نعتبر g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي:

$g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ وفسر هذه النتيجة بيانيا.

ب) أدرس تغيرات الدالة g ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثيها.

د) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

هـ) أرسم (C_g) .

و) H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان.

- عين α و β حتى تكون H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto g(x) - 1$.
- استنتج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0 .
- III- لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $k(x) = g(x^2)$ باستعمال مشتقة دالة مركبة، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط. عين الجواب الصحيح معللا اختيارك.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط:

$A(1; 3; -1)$ ، $B(4; 1; 0)$ ، $C(-2; 0; -2)$ ، $D(3; 2; 1)$ والمستوي (P) الذي معادلته:

$$x - 3z - 4 = 0$$

1) المستوي (P) هو: ج1) (BCD) ، ج2) (ABC) ، ج3) (ABD) .

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو:

ج1) $\vec{n}_1(1; 2; 1)$ ، ج2) $\vec{n}_2(-2; 0; 6)$ ، ج3) $\vec{n}_3(2; 0; -1)$.

3) المسافة بين النقطة D والمستوي (P) هي: ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

التمرين الثاني:

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_0 = \frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 \quad : n \text{ طبيعي}$$

1- أ) أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

والمحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

ب) باستعمال الرسم السابق، مثل على محور الفواصل وبدون حساب الحدود: u_2, u_1, u_0

u_4, u_3 .

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$.

ب) تحقق أن (u_n) متزايدة.

ج) هل (u_n) متقاربة؟ برر إجابتك .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث : (حذفت بعض أسئلة التمرين التي أصبحت خارج البرنامج المقرر)

1- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن A, B نقطتان من

المستوي التي لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث : $z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$.

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

2- لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث : $z_C = \frac{4-i}{1+i}$.

أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

3- أ) برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k ($k > 0$) و

زاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي :

$$z' - z_0 = ke^{i\theta} (z - z_0)$$

ب) تطبيق : عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعروف :

$$z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left(z + \frac{1}{2}i \right)$$

التمرين الرابع :

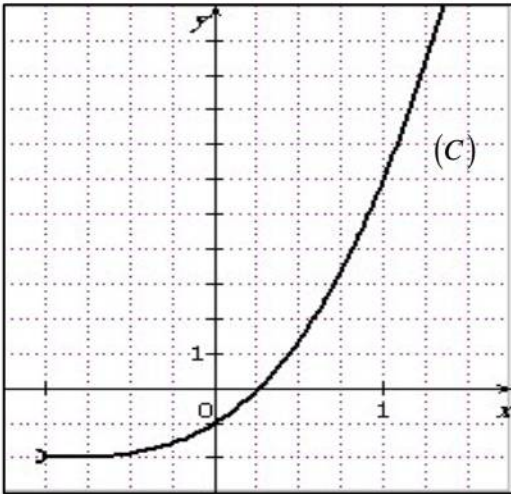
المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة

العددية g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يأتي :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1- أ) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g

$$\text{وحدد } g(0) \text{ وإشارة } g\left(\frac{1}{2}\right)$$



ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $0; \frac{1}{2}$ يحقق : $g(\alpha) = 0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

2- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بما يأتي :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من مجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسر النتيجة بيانياً.

ج) أحسب : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ وفسر النتيجة بيانياً.

د) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- نأخذ $\alpha \approx 0,26$

أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب) أرسم المنحني (Γ) .

4) أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان.

ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تحقق : $F(1) = 2$.

حل الموضوع الأول

التمرين الأول:

1- لدينا: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$ ، ومنه:

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{2008} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2008} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]^{2008} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1004} \left[\cos \frac{2008\pi}{4} + i \sin \frac{2008\pi}{4} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^{1004} (\cos 502\pi + i \sin 502\pi) = \left(\frac{1}{2} \right)^{1004} [\cos(251 \times 2\pi) + i \sin(251 \times 2\pi)]$$

لدينا: $\cos(251 \times 2\pi) = 1$ و $\sin(251 \times 2\pi) = 0$ ،

ومنه: $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{2008} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1004} [1 + i \times 0] = \left(\frac{1}{2} \right)^{1004}$ ، ومنه عدد حقيقي .

2- أ/ لدينا: $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$ ، نضع: $\theta_1 = \theta$ و $\theta_2 = -\theta$ فنجد:

$$e^{i(\theta - \theta)} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta} ، أي: $e^{i0} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta}$ ، أي: $1 = e^{i\theta} \times e^{-i\theta}$ ، ومنه: $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$$

لدينا: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \times \frac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \times e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ ،

ب/ لدينا: $Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$ ، ومنه: $Z = \frac{i}{-1+i}$. لكن: $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $-1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، ومنه:

$$Z = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ج/ لدينا: $Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$ ، ومنه: $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، أي: $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ومنه:

وهذا يعني أن: C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر $z_C - z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (z_B - z_A)$

الذي مركزه النقطة A ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$.

التمرين الثاني :

(1) لدينا $\overrightarrow{AB} (1; 2; -1)$ و $\overrightarrow{AC} (-3; -2; 1)$ ، بما أن $\frac{1}{-3} \neq \frac{2}{-2}$ فإن \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين

خطيا وبالتالي النقط A ، B و C ليست في استقامة وتعين مستويا وحيدا هو المستوي (ABC) . لإثبات ان المعادلة الديكارتيّة لـ (ABC) هي: $y + 2z - 2 = 0$ يكفي أن

نتحقق أن إحداثيات A ، B و C تحقق المعادلة $y + 2z - 2 = 0$.
لدينا : $0 + 2 \times 1 - 2 = 0$ و $2 + 2 \times 0 - 2 = 0$ و $-2 + 2 \times 2 - 2 = 0$

(2) لدينا : $\vec{n} (1; 2; -1)$ شعاع ناظم لـ (p) و $\vec{n}' (0; 1; 2)$ شعاع ناظم لـ (ABC) ، ولدينا

$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times 0 + 2 \times 1 - 1 \times 2 = 0$ ومنه \vec{n} و \vec{n}' متعامدان وبالتالي : (p) و (ABC)

متعامدان . لنعين تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع (p) و (ABC) ، نعين أولا تمثيلا ديكارتيًا لـ (Δ) ثم ننتقل من هذا التمثيل إلى التمثيل الوسيطي .

نحصل على التمثيل الديكارتي لـ (Δ) إنطلاقا من معادلتى (p) و (ABC) ، لدينا هكذا

$$\text{تمثيل ديكارتي لـ } (\Delta) \cdot \begin{cases} x + 2y - z + 7 = 0 \\ y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

للانتقال إلى التمثيل الوسيطي نعتبر مثلا z وسيطا فنضع : $z = t$ ($t \in \mathbb{R}$) ونعوض في

$$\text{الجملة} \begin{cases} x + 2y - z + 7 = 0 \\ y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \text{ نجد : } \begin{cases} x + 2y - t + 7 = 0 \\ y + 2t - 2 = 0 \end{cases} \text{ بحل هذه الجملة نجد :}$$

$$\cdot \begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases} \text{ ومنه تمثيل وسيطي لـ } (\Delta) \text{ : } \begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

ب) بما أن (p) و (ABC) متعامدان و $A \in (ABC)$ فإن $d(A; (\Delta)) = d(A; (p))$

$$\text{ومنه : } d(A; (\Delta)) = d(A; (p)) = \frac{|2 + 2 \times 0 - 1 + 7|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

3- G مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; \alpha); (C; \beta)\}$ وبالتالي إحداثياتها هي :

$$x_G = \frac{1 \times 2 + \alpha \times 3 + \beta \times (-1)}{1 + \alpha + \beta} = \frac{3\alpha - \beta + 2}{1 + \alpha + \beta}$$

$$y_G = \frac{1 \times 0 + \alpha \times 2 + \beta \times (-2)}{1 + \alpha + \beta} = \frac{2\alpha - 2\beta}{1 + \alpha + \beta}$$

$$z_G = \frac{1 \times 1 + \alpha \times 0 + \beta \times (2)}{1 + \alpha + \beta} = \frac{2\beta + 1}{1 + \alpha + \beta}$$

$$G \left(\frac{3\alpha - \beta + 2}{1 + \alpha + \beta}, \frac{2\alpha - 2\beta}{1 + \alpha + \beta}, \frac{2\beta + 1}{1 + \alpha + \beta} \right) : \text{إذن}$$

G تنتمي إلى (Δ) معناه إحداثياتها تحقق التمثيل الوسيط لـ (Δ) ، بالتعويض في التمثيل

$$\frac{2\beta + 1}{1 + \alpha + \beta} = t \text{ بتعويض (3) من (3) نجد الوسيط نجد } \begin{cases} \frac{3\alpha - \beta + 2}{1 + \alpha + \beta} = -11 + 5t \dots (1) \\ \frac{2\alpha - 2\beta}{1 + \alpha + \beta} = 2 - 2t \dots (2) \\ \frac{2\beta + 1}{1 + \alpha + \beta} = t \dots (3) \end{cases}$$

$$\text{في (1) و (2) نجد } \alpha = -\frac{4}{7}$$

التمرين الثالث :

$$f'(x) = \frac{(-x + 4) - (x + 2)(-1)}{(-x + 4)^2} = \frac{6}{(-x + 4)^2} > 0 \text{ ، لدينا } x \in I \text{ ليكن } -1$$

ومنه : f متزايدة تماما على I .

(ب) ليكن $x \in I$ ، أي $0 \leq x \leq 1$ ، وبما أن f متزايدة تماما على I فإن :

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1) \text{ ، أي : } 1 \leq f(x) \leq 2$$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

www.3odirasa.com

(أ-2) * المرحلة 1: من أجل $n = 0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $u_0 = \frac{3}{2} \in I$

* المرحلة 2: نفرض صحة $P(n)$ أي $u_n \in I$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \in I$:

لدينا : $u_n \in I$ ومنه حسب السؤال الأخير يكون $f(u_n) \in I$ أي $u_{n+1} \in I$.

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in I$.

$$\text{(ب) لدينا : } u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{-u_n + 4}$$

لدينا : $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ ومنه :

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+
$-x + 4$	+	+	+	0	-
$\frac{x^2 - 3x + 2}{-x + 4}$	+	0	-	0	+

وبما أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in [1; 2]$ فإن : $\frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{-u_n + 4} \leq 0$

أي : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ، إذن (u_n) متناقصة .

لدينا : (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

3-أ) * المرحلة 1: من أجل $n = 0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $u_0 = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0 + 1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

* المرحلة 2: نفرض صحة $P(n)$ أي : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ ،

أي : $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$

لدينا : $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} = \frac{1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} + 2}{-1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} + 4} = \frac{3 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}}{3 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}}$

$$= \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2 + 2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2} = 1 + \frac{2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2} = 1 + \frac{2}{2\left[\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1\right]} = 1 + \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$$

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب) لدينا : $\frac{3}{2} > 1$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ وبالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

التمرين الرابع :

$-I$ لدينا : النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) تعني $f(-1)=1$ ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$ يعني : $f'(-1)=-e$.
 $f(-1)=1$ • تكافئ $(a(-1)+b)e^{-(-1)}+1=1$ أي $(-a+b)e=0$
 $-a+b=0$

• لدينا : من أجل كل x من المجال $[-2;+\infty[$:

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} = e^{-x}(-ax+a-b)$$

ومنه : $f'(-1)=-e$ تكافئ $e^{-(-1)}(-a(-1)+a-b)=-e$ أي $2a-b=-1$.

بحل الجملة : $\begin{cases} -a+b=0 \\ 2a-b=-1 \end{cases}$ نجد أن : $a=b=-1$. إذن : $f(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$

II - نلاحظ أن $g(x)=f(x)$ من أجل : $a=b=-1$.

أ) لدينا : $g(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$. بوضع : $u = -x$ يكون : $x \rightarrow +\infty$ يكافئ

$u \rightarrow -\infty$. ومنه : $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$ وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ ، نجد أن :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x} - e^{-x} + 1) = 1$. وهذا معناه أن المستقيم الذي معادلته له $y=1$ مقارب

لـ (C_g) عند $+\infty$.

ب) وجدنا سابقا : $f'(x) = e^{-x}(-ax+a-b)$ ، ومنه من أجل $a=b=-1$ نستنتج أن :

$g'(x) = xe^{-x}$. وبالتالي إشارة $g'(x)$ هي من إشارة x على المجال $[-2;+\infty[$. لدينا :

x	-2	0	$+\infty$
x		$-$	$+$
$g'(x)$		$-$	$+$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $[-2;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

فيكون جدول تغيراتها كما يلي :

x	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	e^2+1	0	1

حيث : $g(-2) = (-(-2)-1)e^{-(-2)}+1 = e^2+1$ و $g(0) = (-0-1)e^{-0}+1 = 0$

ج) لدينا : $g'(x) = xe^{-x}$ ومنه : $g''(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

إشارة $g''(x)$ هي من إشارة $(1-x)$ على المجال $[-2; +\infty[$. لدينا :

x	-2	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$
$g''(x)$	$+$	0	$-$

نلاحظ أن $g''(x)$ ينعدم عند العدد 1 ويغير من إشارته ومنه النقطة $I(1; g(1))$ هي نقطة

انعطاف للمنحني (C_g) . لدينا : $g(1) = (-1-1)e^{-1} + 1 = -2e^{-1} + 1$

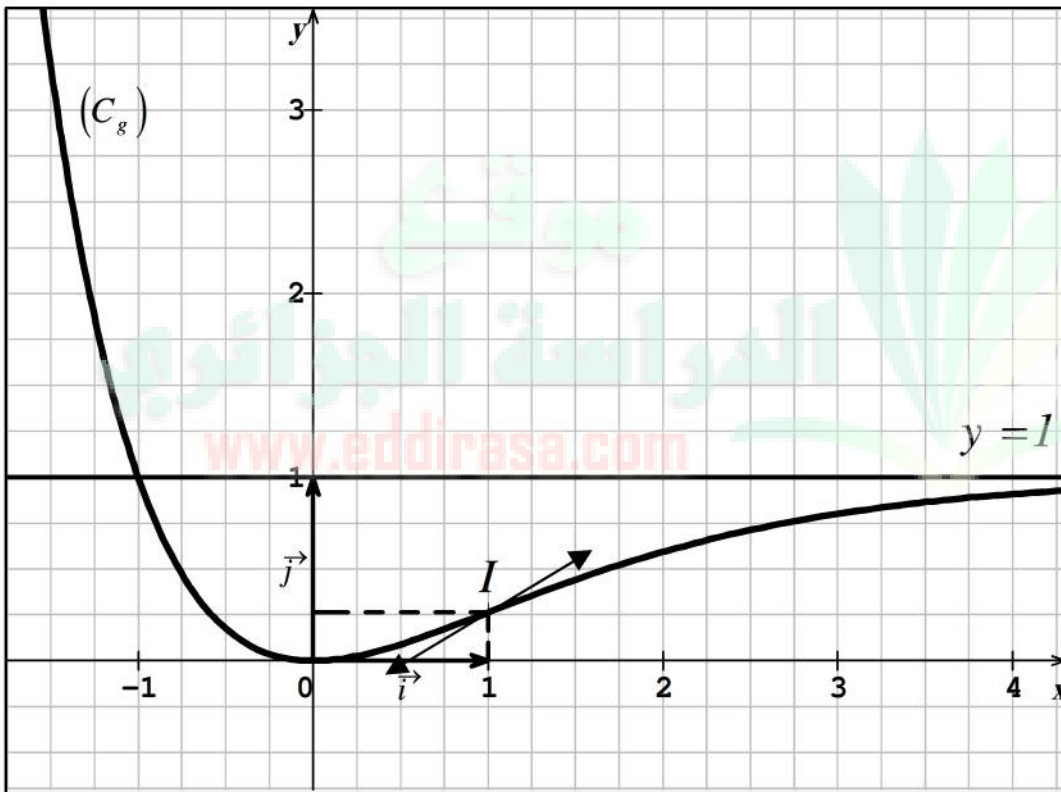
إذن : $I(1; -2e^{-1} + 1)$

د) معادلة المماس للمنحني (C_g) عند النقطة I هي من الشكل : $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$

لدينا : $g(1) = -2e^{-1} + 1$ و $g'(1) = 1e^{-1} = e^{-1}$

ومنه : $y = e^{-1}(x - 1) - 2e^{-1} + 1$ ، أي : $y = e^{-1}x - 3e^{-1} + 1$

هـ) رسم (C_g) :



و) لدينا : $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ ، ومنه :

$$\begin{aligned} H'(x) &= (\alpha x + \beta)' \times e^{-x} + (\alpha x + \beta)(e^{-x})' = \alpha e^{-x} - (\alpha x + \beta)e^{-x} \\ &= (-\alpha x + \alpha - \beta)e^{-x} \end{aligned}$$

H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x) - 1$ معناه : $H'(x) = g(x) - 1$ ، أي :

بالمطابقة ، $-\alpha x + \alpha - \beta = -x - 1$ ، ومنه : $(-\alpha x + \alpha - \beta)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$

نجد: $\begin{cases} -\alpha = -1 \\ \alpha - \beta = -1 \end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$. إذن: $H(x) = (x+2)e^{-x}$.

- الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0 معرفة بـ: $G(x) = H(x) + x + c$ و $G(0) = 0$ ، حيث c ثابت حقيقي .

$G(0) = 0$ تكافئ: $H(0) + 0 + c = 0$ ، أي: $c = -H(0) = -(0+2)e^{-0} = -2$

إذن: $G(x) = (x+2)e^{-x} + x - 2$

III - الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $k(x) = g(x^2)$

لدينا: $k'(x) = (x^2)' g'(x^2) = 2x (x^2 e^{-x^2})$

إن إشارة $k'(x)$ هي من إشارة x على المجال $[-2; +\infty[$ لكون $2x^2 e^{-x^2} \geq 0$. لدينا:

x	-2	0	$+\infty$
x		$-$	$+$
$k'(x)$		$-$	$+$

ومن الدالة k متناقصة تماما على المجال $[-2; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.
فيكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$		$-$	$+$
$k'(x)$		0	1

$-5e^{-4} + 1$ 0 1

حيث:

$k(-2) = g((-2)^2) = g(4) = -5e^{-4} + 1$.

$k(0) = g(0^2) = g(0) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 1$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{X \rightarrow +\infty} g(X) = 1$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 1$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول:

(I) المستوي (P) هو: ج2) ، (ABC) ، لأن:

• إحدائيات كل من A ، B و C تحقق معادلة (P) ، إذ أن:

إحدائيات A فعلا تحقق معادلة (P) لأن: $1 - 3 \times (-1) + 4 = 0$ تكافئ $0 = 0$.

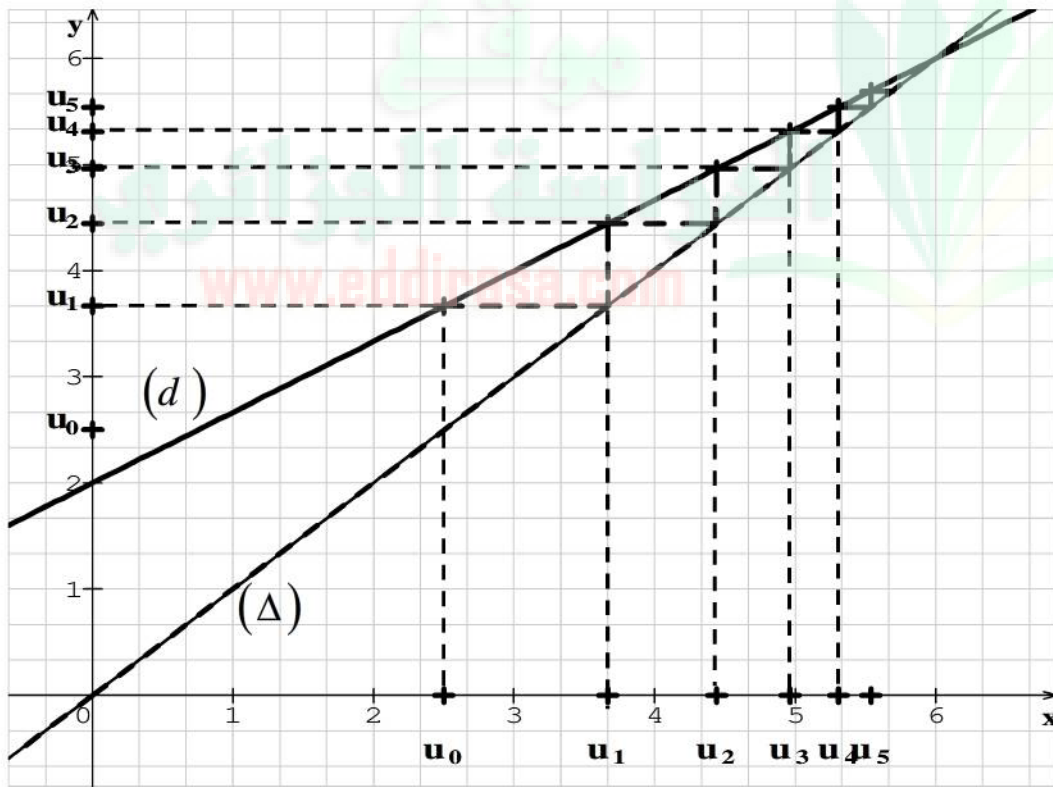
- إحداثيات B فعلا تحقق معادلة (P) لأن: $4 - 3 \times 0 - 4 = 0$ تكافئ $0 = 0$.
- إحداثيات C فعلا تحقق معادلة (P) لأن: $-2 - 3 \times (-2) - 4 = 0$ تكافئ $0 = 0$.
- A, B, C ليست في استقامة، إذ أن الشعاعان \overline{AB} و \overline{AC} غير مرتبطين خطيا:
- $\overline{AB} (3; -2; 1)$ و $\overline{AC} (-3; -3; -1)$ ، ولدينا: $\frac{3}{-3} \neq \frac{-2}{-3}$.

ملاحظة: يتضح جليا معرفة الجواب من السؤال الثالث.

- (2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو: ج2) $\vec{n}_2 (-2; 0; 6)$ ، لأن:
- من معادلة (P) نستنتج أن شعاع ناظم لـ (P) $\vec{n} (1; 0; -3)$. وبملاحظة أن: $\vec{n}_2 = 2\vec{n}$ نستنتج أن \vec{n}_2 مرتبط خطيا مع \vec{n} ومنه شعاع ناظم لـ (P) .

- (3) المسافة بين النقطة D والمستوي (P) هي: ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ، لأن:

$$d(D; (P)) = \frac{|3 - 3 \times 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$



التمرين الثاني:
1- أ) أنظر الرسم.

- لدينا: $u_{n+1} = f(u_n)$ ومنه: $u_1 = f(u_0)$ و $u_2 = f(u_1)$ و $u_3 = f(u_2)$ و $u_4 = f(u_3)$.
- ب) التخمين: المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو العدد 6 (العدد 6 هو فاصلة نقطة تقاطع (d) و (Δ)).

2. أ) * المرحلة 1: من أجل $n = 0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $u_0 \leq 6$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي: $u_n \leq 6$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي: $u_{n+1} \leq 6$.

لدينا : $u_n \leq 6$ ومنه $\frac{2}{3}u_n \leq 4$ ومنه $\frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$ أي : $u_{n+1} \leq 6$.

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$.

ب) لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 2$ ، وبما أن $u_n \leq 6$ فإن $-\frac{1}{3}u_n \geq -2$

ومنه : $-\frac{1}{3}u_n + 2 \geq 0$ ، أي $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ، إذن (u_n) متزايدة .

3.أ) لدينا : $v_n = u_n - 6$ ومنه :

ومنه (v_n) متتالية هندسية ، $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}(u_n - 6) = \frac{2}{3}v_n$

أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$

ب) لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه : $u_n = v_n + 6 = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$

بما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6\right) = 6$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$

التمرين الثالث :

1- بما أن الدائرة (Γ) قطرها $[AB]$ فإن مركزها ω هو منتصف $[AB]$ ،

ومنه : $z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2 - 2i + 2 + i}{2} = -\frac{1}{2}i$

2- لدينا : $z_C = \frac{4-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-5i}{2-2i} = \frac{3-5i}{2} + \frac{1}{2}i$. ليكن r نصف قطر الدائرة (Γ) ،

لدينا : $r = \frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2 - 2i - 2 - i|}{2} = \frac{|-4 - 3i|}{2} = \frac{5}{2}$

ولدينا : $\omega C = \left| \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + \frac{1}{2}i \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right| = \frac{5}{2}$ ، بما أن : $\omega C = r$ ، فإن النقطة C تنتمي

إلى الدائرة (Γ) .

3-أ) لدينا : $M' = S(M)$ تعني : $\left\{ \begin{array}{l} M_0M' = k \times M_0M \\ \left(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{array} \right.$ ، ومنه :

$$\text{ومنه: } \begin{cases} \left| \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right| = k \\ \arg \left(\frac{z' - z_0}{z - z_0} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \quad \text{ومنه: } \begin{cases} \frac{M_0 M'}{M_0 M} = k \\ \left(\overrightarrow{M_0 M}; \overrightarrow{M_0 M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$. z' - z_0 = k e^{i\theta} (z - z_0) \text{ ، أي: } \frac{z' - z_0}{z - z_0} = k e^{i\theta}$$

$$\text{ب) لدينا: } z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left(z + \frac{1}{2}i \right) \text{ ، تكافئ: } z' - z_\omega = 2e^{i\frac{\pi}{3}} (z - z_\omega)$$

$$\text{أن: } \left| 2e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = 2 \neq 1 \text{ ، فإن التحويل } S \text{ هو تشابه مباشر نسبه } 2 \text{ وزاويته } \frac{\pi}{3} \text{ ومركزه } \omega .$$

التمرين الرابع:

(1) أ / جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	-2	$+\infty$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \text{ و } g(0) = -1$$

ب / الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ وبالأخص على المجال $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

ولدينا $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، يوجد عدد حقيقي وحيد α

من المجال $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ يحقق: $g(\alpha) = 0$.

ج / إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$:

من السؤال ب / نلخص إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$ في الجدول التالي:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$		0	$+$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x + 1)^2 - 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)(x + 1)}{(x + 1)^4} \quad \text{أ-2}$$

$$= \frac{(x + 1)(3x^3 + 6x^2 + 3x + 3x^2 + 6x + 3 - 2x^3 - 6x^2 - 6x - 4)}{(x + 1)^4}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x + 1)^3} = \frac{g(x)}{(x + 1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(x - \alpha)^3} = \frac{0}{(x - \alpha)^3} = 0 \quad \text{ب / لدينا :}$$

وهذا ما يفسر وجود مماس للمنحني (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم، أي موازي لمحور الفواصل.

$$\text{ج) • حساب : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) : \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)^2 = 0^+$$

، ومنه: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ ونستنتج أن المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ مقارب لـ (Γ) بجوار $+\infty$.

$$\text{• حساب : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x + 1)^2} = 0$$

د / جدول تغيرات الدالة f : $y = x + 1$ مقارب لـ (Γ) مائل عند $+\infty$.

$$\text{لدينا : } f'(x) = \frac{g(x)}{(x + 1)^3} \text{ ومن أجل كل } x \text{ من مجال }]-1; +\infty[: (x + 1)^3 > 0$$

إذن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(x)$ على $]-1; +\infty[$ و جدول تغيراتها هو كما يلي :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

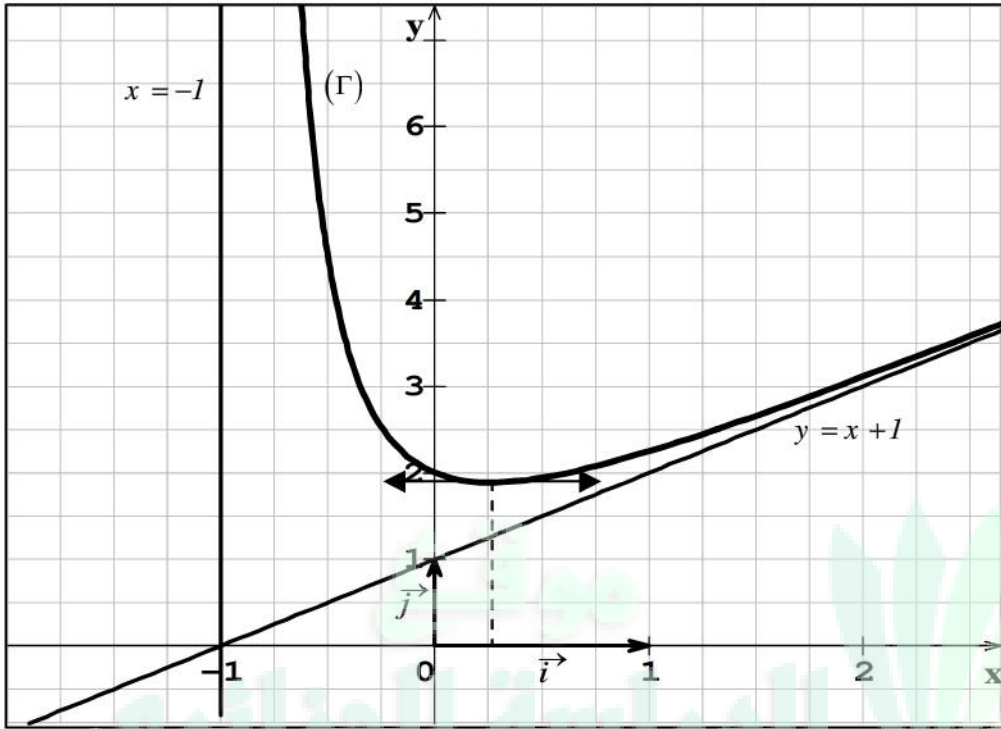
$$\text{حيث : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

3- بأخذ $\alpha \approx 0,26$:

$$f(x) = \frac{g(x)+3}{(x+1)^2} \text{ ، ومنه : } f(\alpha) = \frac{g(\alpha)+3}{(\alpha+1)^2} .$$

$$\text{إذن : } f(\alpha) = \frac{3}{(\alpha+1)^2} \text{ ، ومنه : } f(\alpha) \approx 1,89 .$$

ب) رسم المنحني (Γ) .



4) أ / لدينا :

$$x + a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{x^3 + (a+2)x^2 + (2a+1)x + a+b}{(x+1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \text{ ، وبالتالي : } \begin{cases} a+2=3 \\ 2a+1=3 \\ a+b=2 \end{cases} \text{ ، ومنه : } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \text{ ، بالمطابقة نجد :}$$

$$\text{ب / لدينا : } f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \text{ ، ومنه : } F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{x+1} + c \text{ ، حيث } c$$

$$\text{ثابت حقيقي ، وبما أن : } F(1) = 2 \text{ فإن : } \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{1} + c = 2 \text{ ، ومنه : } c = 1 \text{ ، إذن :}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{x+1} + 1$$